Mecklenburg-Vorpommern

Nachname, Vorname des Prüflings

Abitur 2025

Mathematik

Grundkurs

Prüfungsteil A – hilfsmittelfreie Aufgaben

Hinweise für den Prüfling

Aufgaben-bearbeitung:

Tragen Sie zuerst auf dem Deckblatt Ihren Nachnamen und Vornamen ein.

Der Prüfungsteil A beinhaltet

- drei Pflichtaufgaben (Aufgaben 1, 2 und 3),
- drei Wahlaufgaben aus der Aufgabengruppe 1 (Aufgaben 4, 5, 6),
- drei Wahlaufgaben aus der Aufgabengruppe 2 (Aufgaben 7, 8, 9).

Bearbeiten Sie

- die drei Pflichtaufgaben,
- eine Wahlaufgabe der Aufgabengruppe 1 und
- eine Wahlaufgabe der Aufgabengruppe 2.

Fertigen Sie die Lösungen im vorliegenden Aufgabendokument an, zusätzliche Lösungsblätter sind mit Ihrem Namen zu versehen und in dieses Dokument einzulegen.

Bearbeitungszeit:

Für den Prüfungsteil A beträgt die Bearbeitungszeit einschließlich Auswahlzeit maximal 100 Minuten.

Hilfsmittel:

Bearbeiten Sie die Aufgaben ohne Zuhilfenahme einer Formelsammlung (bzw. Tafelwerk) oder eines Taschenrechners.

Folgende Hilfsmittel stehen zur Verfügung:

- Zeichengeräte,
- ein Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung in gedruckter oder digitaler Form,
- ein zweisprachiges Wörterbuch in gedruckter oder digitaler Form für Prüflinge mit nichtdeutscher Herkunftssprache.

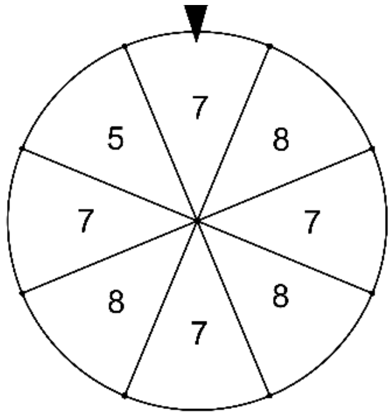
Bewertung:

Die Lösungen sind in einer sprachlich korrekten, mathematisch exakten und äußerlich einwandfreien Form darzustellen. In der Niederschrift müssen die Lösungswege nachvollziehbar sein.

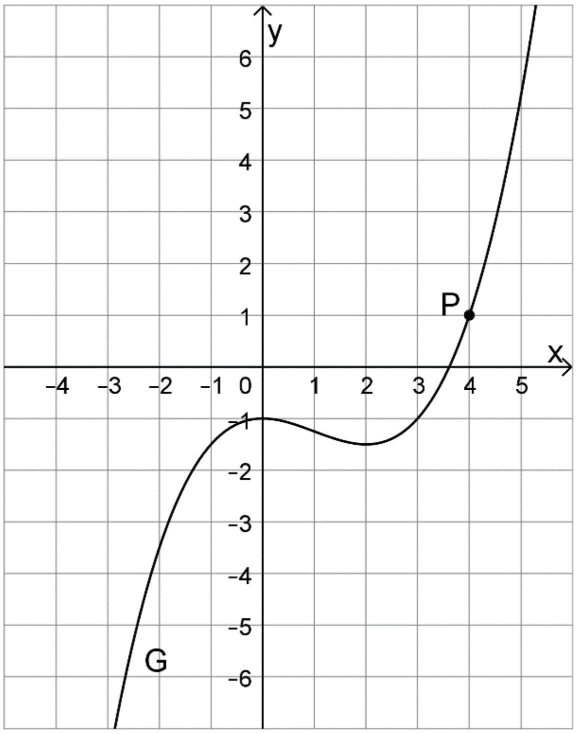
Je Aufgabe sind 5 Bewertungseinheiten (BE) erreichbar. Bearbeitet ein Prüfling mehr Wahlaufgaben als gefordert, so wird jeweils die Aufgabe gewertet, welche die höchste Anzahl an BE erbringt.

1 Analysis – Pflichtaufgabe	BE
Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = 4x^3 - 12x^2$. Sie besitzt genau zwei Nullstellen, eine davon ist 0.	
1.1 Zeigen Sie, dass $x = 3$ die andere Nullstelle von f ist.	1
1.2 Berechnen Sie den Wert von $\int_0^1 f(x)\,dx$.	2
1.3 Begründen Sie, dass der Graph von f für $0 < x < 3$ unterhalb der x-Achse verläuft.	2

2 Analytische Geometrie – Pflichtaufgabe	BE
Gegeben ist die Gerade $g:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}8\\3\\-3\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-4\\0\\3\end{pmatrix}$ mit $s\in\mathbb{R}$.	
2.1 Zeigen Sie, dass der Punkt $P(4\,\vert\,3\,\vert\,3)$ nicht auf g liegt. Geben Sie die Koordinaten eines Punktes Q an, der auf g liegt und sich nur in einer Koordinate von P unterscheidet.	3
2.2 Die Gerade h verläuft parallel zur y-Achse und schneidet g im Punkt $(8\,\vert\,3\,\vert\,-3)$. Untersuchen Sie, ob g und h senkrecht zueinander verlaufen.	2

3 Stochastik – Pflichtaufgabe	BE
Ein Glücksrad mit acht gleich großen Sektoren ist wie abgebildet beschriftet. Das Glücksrad wird zweimal gedreht. 	
3.1 Geben Sie die Bedeutung des Terms $\left(\frac{3}{8}\right)^2$ im Sachzusammenhang an.	2
3.2 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Summe der erzielten Zahlen ungerade ist.	3

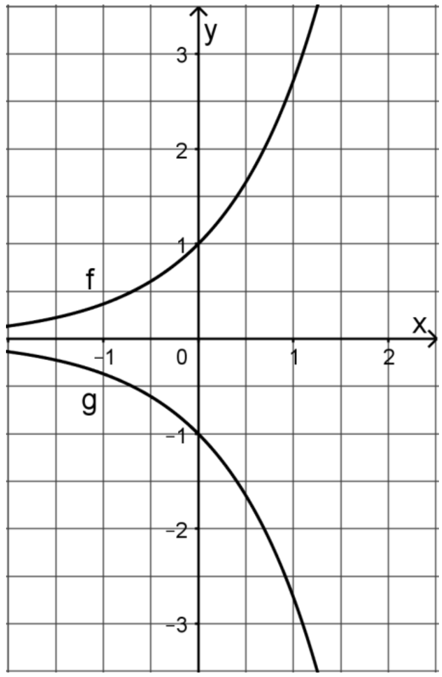
Hinweis: Von den Wahlaufgaben 4, 5 und 6 ist **eine** zu bearbeiten.

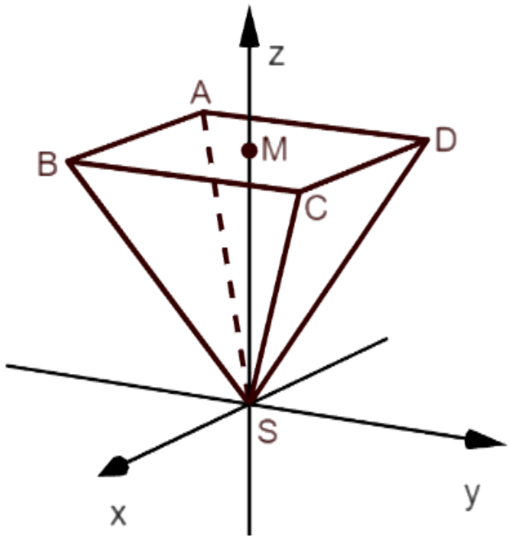
4 Analysis – Wahlaufgabe (Aufgabengruppe 1)	BE
Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x)=\frac{1}{8}x^3-\frac{3}{8}x^2-1$. Die Abbildung zeigt den Graphen G von f. Die Tangente an G im Punkt $P(4\|1)$ wird mit t bezeichnet.  	
4.1 Bestimmen Sie rechnerisch eine Gleichung von t.	3
4.2 Es gibt genau eine weitere Tangente an G, die parallel zu t verläuft. Skizzieren Sie diese in der Abbildung.	2

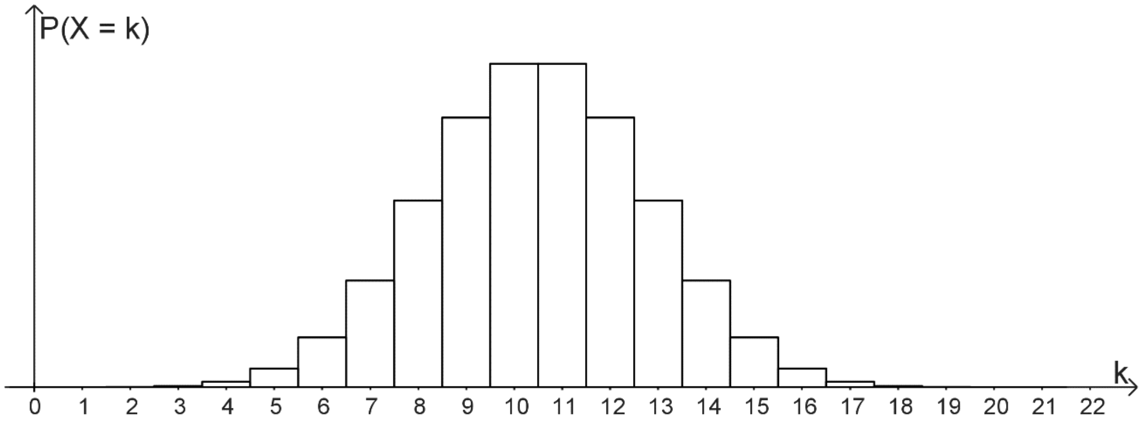
5 Analytische Geometrie – Wahlaufgabe (Aufgabengruppe 1)	BE
Gegeben sind die Punkte $P(0 \mid -1 \mid 1)$ und $Q(2 \mid 5 \mid 3)$.	
5.1 Durch Spiegelung des Punktes P am Punkt Q entsteht der Punkt P'. Ermitteln Sie die Koordinaten von P'.	2
5.2 Die Ebene E hat die Gleichung $E\colon\ x + 3y + z = 20$. Weisen Sie nach, dass Q in E liegt und der Vektor $\overrightarrow{PQ}$ ein Normalenvektor von E ist.	3

6 **Stochastik – Wahlaufgabe (Aufgabengruppe 1)**	BE
Ein auf künstlicher Intelligenz (KI) basierender Bilderkennungsalgorithmus soll für eine Verkehrsüberwachung alle Objekte, die sich im Bild einer Kamera bewegen, in die Kategorien "Fußgänger" und "Sonstige Verkehrsteilnehmende" einteilen. Die Polizei weiß aus Erfahrung, dass im Kreuzungsbereich, der von dieser Kamera überwacht wird, 10 % der Verkehrsteilnehmenden Fußgänger sind. Nach einer Testphase werden die Ergebnisse analysiert, die mit der KI gewonnen wurden. Es zeigte sich, dass 95 % der Fußgänger, aber auch 2 % der sonstigen Verkehrsteilnehmenden von der KI als Fußgänger kategorisiert werden.	
6.1 Stellen Sie die möglichen Ergebnisse dieser Untersuchung in einem vollständig beschrifteten Baumdiagramm dar.	3
6.2 Mit dem Term $\frac{0{,}1\cdot 0{,}95}{0{,}1\cdot 0{,}95+0{,}9\cdot 0{,}02}$ kann eine Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis im Sachzusammenhang berechnet werden. Geben Sie dieses Ereignis an.	2

Hinweis: Von den Wahlaufgaben 7, 8 und 9 ist **eine** zu bearbeiten.

7 Analysis – Wahlaufgabe (Aufgabengruppe 2)	BE
Gegeben sind die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f mit $f(x) = e^x$ und g mit $g(x) = -e^x$.	
7.1 Die Abbildung zeigt die Graphen der Funktionen f und g. Begründen Sie mithilfe der Abbildung, dass gilt: $\int_0^1 f(x)\,dx > 1{,}5$. 	2
7.2 Die Tangente an den Graphen von f an der Stelle a, $a \in \mathbb{R}$, heißt t_f und die Tangente an den Graphen von g an der Stelle a heißt t_g. Ermitteln Sie den Wert von a, für den die Tangenten t_f und t_g einen rechten Winkel bilden.	3

8 **Analytische Geometrie – Wahlaufgabe (Aufgabengruppe 2)**	BE
Das Quadrat ABCD ist Grundfläche einer geraden Pyramide, deren Spitze S im Koordinatenursprung liegt. $M(0\|0\|5)$ ist der Mittelpunkt des Quadrats. Der Punkt $P(2\|-2\|4)$ liegt auf der Seitenkante $\overline{BS}$ der Pyramide.  	
8.1 Geben Sie eine Gleichung der Ebene an, in der die Grundfläche der Pyramide liegt.	1
8.2 Ermitteln Sie den Flächeninhalt der Grundfläche.	4

9 Stochastik – Wahlaufgabe (Aufgabengruppe 2)	BE
Die Abbildung zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer binomialverteilten Zufallsgröße X mit den Parametern n und $p = 0{,}5$.  	
9.1 Es gilt $P(X = 10) = P(X = 11)$. Begründen Sie, dass n nicht gerade ist.	2
9.2 Es gilt $P(X \geq 9) \approx 0{,}81$ und $P(X = 12) \approx 0{,}14$. Berechnen Sie unter Verwendung dieser Werte näherungsweise die Wahrscheinlichkeit $P(X = 10)$.	3

Mecklenburg-Vorpommern

Nachname, Vorname des Prüflings

Abitur 2025

Mathematik (CAS)

Grundkurs

Prüfungsteil B – komplexe Aufgaben

Hinweise für den Prüfling

Aufgabenbearbeitung:

Tragen Sie zuerst auf dem Deckblatt Ihren Nachnamen und Vornamen ein.

Der Prüfungsteil B beinhaltet
- eine Pflichtaufgabe Analysis (Aufgabe 1),
- zwei Wahlaufgaben Geometrie (Aufgaben 2 und 3) sowie
- zwei Wahlaufgaben Stochastik (Aufgaben 4 und 5).

Bearbeiten Sie die Pflichtaufgabe Analysis, eine Wahlaufgabe Geometrie und eine Wahlaufgabe Stochastik.

Sofern ein entsprechender Hinweis in einer Teilaufgabe gegeben wird, sollen graphische Darstellungen im vorliegenden Aufgabendokument angefertigt werden, andernfalls verwenden Sie bitte bereitgestelltes Papier bzw. Millimeterpapier. Geben Sie auf der Reinschrift Ihren Namen sowie die bearbeiteten Wahlaufgaben an und nummerieren Sie die Seiten Ihrer Arbeit fortlaufend.

Bearbeitungszeit:

Die Bearbeitungszeit für die Prüfungsteile A und B beträgt einschließlich Auswahlzeit 285 Minuten.

Nach Abgabe des Prüfungsteils A steht Ihnen der verbleibende Zeitraum für die Bearbeitung dieses Prüfungsteils B zur Verfügung.

Hilfsmittel:

Folgende Hilfsmittel stehen zur Verfügung:
- eine an der Schule eingeführte Formelsammlung (bzw. Tafelwerk),
- ein an der Schule zugelassenes Computeralgebrasystem (CAS),
- Zeichengeräte,
- ein Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung in gedruckter oder digitaler Form,
- ein zweisprachiges Wörterbuch in gedruckter oder digitaler Form für Prüflinge mit nichtdeutscher Herkunftssprache.

Bewertung:

Die Lösungen sind in einer sprachlich korrekten, mathematisch exakten und äußerlich einwandfreien Form darzustellen. In der Niederschrift müssen die Lösungswege nachvollziehbar sein.

In der Aufgabe 1 zur Analysis sind 25 Bewertungseinheiten (BE) erreichbar und in den Wahlaufgaben jeweils 15 BE. Bearbeitet ein Prüfling mehr Wahlaufgaben als gefordert, so wird jeweils die Aufgabe gewertet, welche die höchste Anzahl an BE erbringt.

Maximal zwei Bewertungseinheiten können zusätzlich vergeben werden bei guter Notation und Darstellung sowie eleganten, kreativen und rationellen Lösungswegen. Maximal zwei Notenpunkte können bei mehrfachen Formverstößen abgezogen werden.

1 Pflichtaufgabe Analysis

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=\frac{3}{100}\cdot x^3-\frac{91}{100}\cdot x^2+9\cdot x-26$ und $x\in\mathbb{R}$.

1.1 Geben Sie für f die Nullstelle sowie das Verhalten für $x\to-\infty$ und für $x\to+\infty$ an. 3 BE

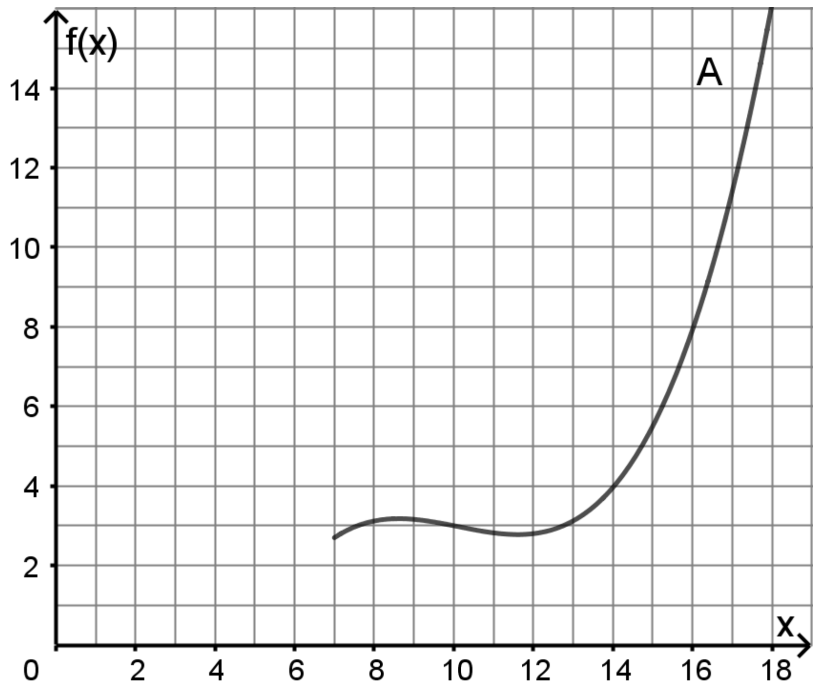
1.2 Die Funktion f hat genau eine Wendestelle. 2 BE
Weisen Sie nach, dass $x=\frac{91}{9}$ diese Stelle ist.

1.3 Ermitteln Sie das Intervall, das alle Werte von x enthält, für die f monoton fallend ist. 2 BE

1.4 F ist eine Stammfunktion von f. 4 BE
Berechnen Sie für $a>0$ alle Lösungen der Gleichung $F\left(\frac{91}{9}\right)-F\left(\frac{91}{9}-a\right)=10$.
Skizzieren Sie außerdem eine graphische Lösung dieser Gleichung.

Beim Laufen bildet sich im menschlichen Körper Laktat (Milchsäure). Die Laktatkonzentration ist abhängig von der Belastung der Muskeln. Die Messung der Laktatkonzentration im Blut dient zur Diagnostik der Ausdauerleistung und zur Trainingsplanung. Ein Ziel der Diagnostik ist dabei die Bestimmung der Laktatschwelle. Vereinfacht bezeichnet diese die höchste Laufgeschwindigkeit, die langfristig durchgehalten werden kann, z. B. bei einem Marathon.

Für einen Läufer A kann auf Grundlage seiner Messwerte die Laktatkonzentration durch die Funktion f im Intervall $7\le x\le 18$ modelliert werden.
Dabei ist x die Laufgeschwindigkeit in km/h (Kilometer pro Stunde) und $f(x)$ die Laktatkonzentration in mmol/L (Millimol pro Liter).
Den in der Abbildung dargestellten Graphen von f nennt man Laktatkurve des Läufers A.



1.5 Zur Ermittlung der individuellen Laktatschwelle existieren in der Sportmedizin verschiedene mathematische Methoden: 5 BE

Methode 1: Bei Erreichung von genau 4 mmol Laktat pro Liter Blut.

Methode 2: Der Anstieg der Laktatkurve erreicht den Wert 1.

Berechnen und vergleichen Sie für den Läufer A für beide Methoden die Laktatschwelle.

1.6 Im Rahmen einer Leistungsdiagnostik für einen Läufer B ergaben sich die in der Tabelle dargestellten Messwerte.

Laufgeschwindigkeit x in km/h	7	8	10	14	18
Laktatkonzentration in mmol/L	2,5	2,8	3,1	4,5	10,6

1.6.1 Bestimmen Sie mithilfe der ersten vier Messwertpaare eine Gleichung einer ganzrationalen Funktion dritten Grades, die die Laktatkurve für Läufer B modelliert. 4 BE

Zeigen Sie, dass die ermittelte Modellfunktion auch eine gute Näherung für das letzte Wertepaar liefert.

Term zur Kontrolle: $0{,}012\,x^3 - 0{,}35\,x^2 + 3{,}5\,x - 9{,}07$

1.6.2 Ergänzen Sie in der Abbildung die modellierte Laktatkurve für Läufer B für $7 \le x \le 18$ sowie die Messwerte. 3 BE

1.6.3 Bewerten Sie anhand eines Kriteriums, welcher der Läufer A und B den besseren Trainingszustand aufweisen könnte. 2 BE

Hinweis: Von den Wahlaufgaben 2 und 3 ist **eine** zu bearbeiten.

2 Wahlaufgabe Analytische Geometrie

Betrachtet wird ein gerades Prisma mit den Eckpunkten A, B, C, D, E und F.
Seine Grundfläche ist das Dreieck ABC.

$A(-2|0|0)$, $B(2|0|0)$, $C(0|8|0)$, $D(-2|0|4)$, $E(2|0|4)$, $F(0|8|4)$

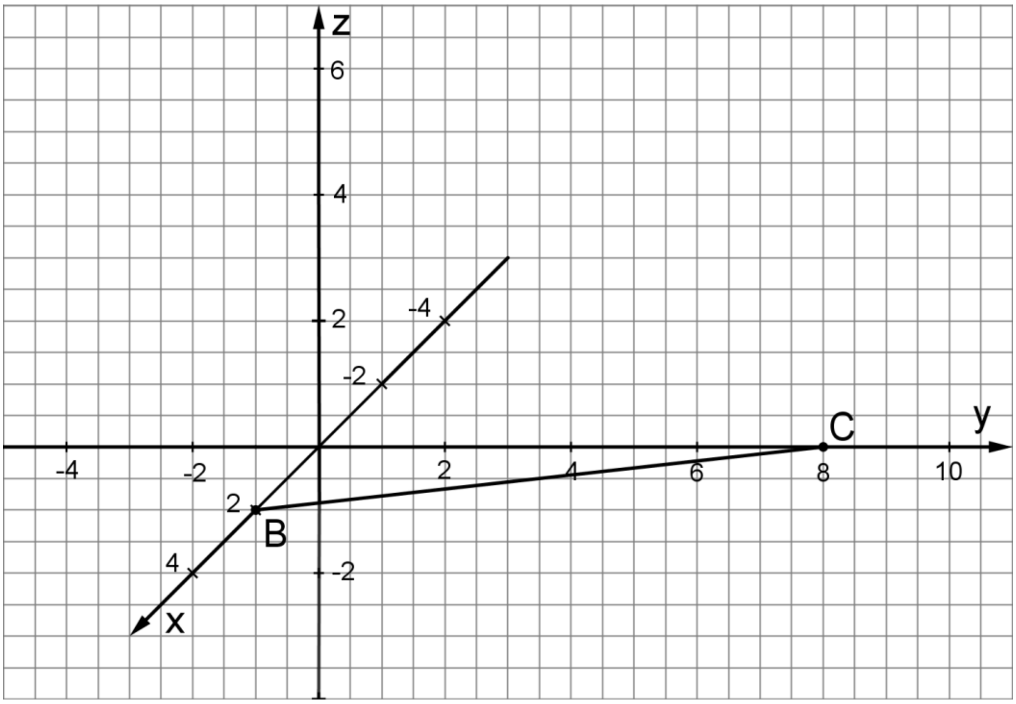


Abbildung 1

2.1 Abbildung 1 zeigt die Kante $\overline{BC}$ des Prismas. 5 BE

Zeichnen Sie das Prisma in Abbildung 1 ein und berechnen Sie das Volumen des Prismas.

2.2 Die Seitenfläche BCFE liegt in der Ebene H. Bestimmen Sie eine Gleichung von H in Koordinatenform. 3 BE

Zur Kontrolle: $4x + y = 8$

2.3 Die Ebene H liegt parallel zu einer der drei Koordinatenachsen. Geben Sie diese Achse an und begründen Sie Ihre Angabe anhand der Gleichung dieser Ebene. 2 BE

Im Folgenden wird die Gerade g mit der Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$ betrachtet.

Des Weiteren wird der Punkt F durch den Punkt $F_t(0\,|\,t\,|\,12-t)$ mit $0 < t \le 8$ ersetzt. Für jeden Wert von t liegt der Punkt F_t auf der Gerade g (vgl. Abbildung 2).

Mit M wird der Mittelpunkt der Basis $\overline{DE}$ des gleichschenkligen Dreiecks EF_tD bezeichnet.

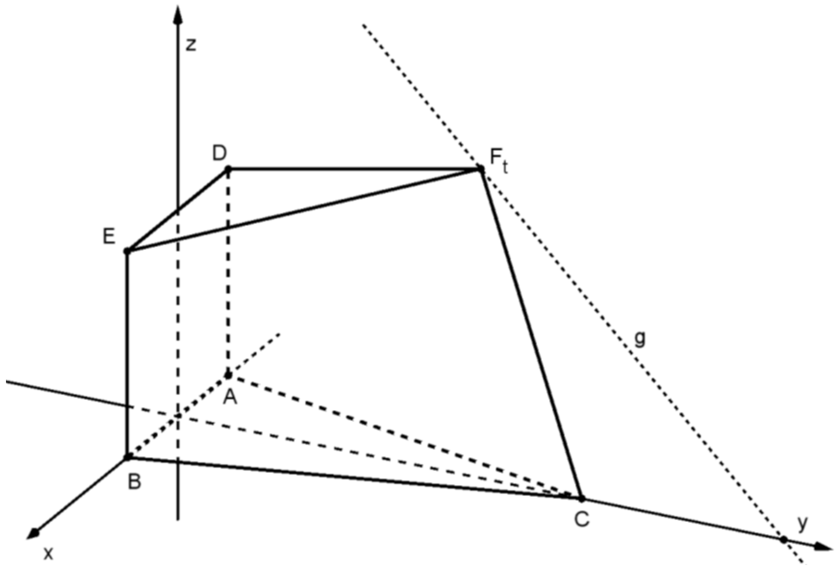


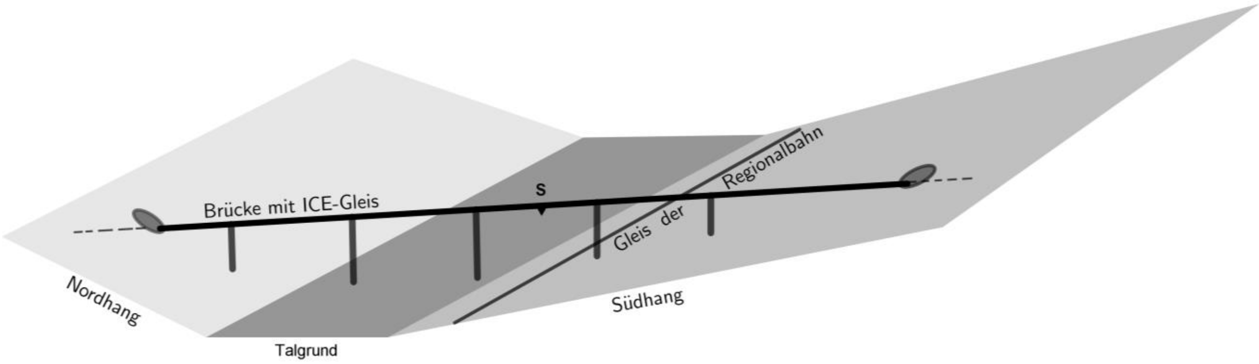
Abbildung 2

2.4 Zeigen Sie rechnerisch, dass für $t = 4$ die Strecke $\overline{MF_t}$ senkrecht auf der Gerade g steht. 2 BE

2.5 Begründen Sie ohne Rechnung, dass der Flächeninhalt des Dreiecks EF_tD für $t = 4$ am kleinsten ist. 3 BE

3 Wahlaufgabe Analytische Geometrie

Eine Brücke mit einem ICE-Gleis überspannt ein Tal. Das Gleis geht unmittelbar im Anschluss dieser Brücke jeweils in einem Tunnel weiter (vgl. Abbildung). Das geradlinig verlaufende Gleis verläuft im Modell entlang der Gerade g mit $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5{,}75 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 32 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $t \in \mathbb{R}$.



In einem kartesischen Koordinatensystem beschreibt die xy-Ebene den horizontal verlaufenden Talgrund. Der Punkt $P(1 \mid -5{,}75 \mid 2)$ stellt den Beginn der Brücke im Nordhang, der Punkt $Q(2{,}5 \mid 10{,}25 \mid 2{,}5)$ das Ende der Brücke im Südhang dar.

Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 10 Meter in der Realität.

3.1 Ein ICE befährt die Brücke vom Nordhang kommend in Richtung Südhang.

3.1.1 Berechnen Sie die Länge der Brücke in Metern. 3 BE

3.1.2 Begründen Sie, dass der ICE beim Überqueren der Brücke einen Anstieg bewältigt. 1 BE

3.2 Der ebene Nordhang liegt im Modell in der Ebene mit der Gleichung $3x + 90y + 172z = d$.

3.2.1 Berechnen Sie den Wert von d. 1 BE

3.2.2 Berechnen Sie die Größe des Neigungswinkels des Nordhangs gegenüber dem horizontal verlaufenden Talgrund. 3 BE

3.3 Gegeben ist eine weitere Gerade h mit $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -8 \\ 2{,}25 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0{,}01 \end{pmatrix}$ und $s \in \mathbb{R}$.

Mithilfe der Gerade h wird das Gleis einer Regionalbahn beschrieben. Dieses Gleis verläuft auf dem Südhang unterhalb der Brücke.

An der Brücke ist ein Sensor zur Brückenüberwachung angebracht. Seine Position ist in der Abbildung mit S bezeichnet. Dieser Sensor befindet sich genau senkrecht oberhalb des Gleises der Regionalbahn.

3.3.1 Geben Sie die besondere Lage der Gerade h bezüglich der xz-Ebene an. 1 BE

3.3.2 Im Modell können die Koordinaten des Punktes, der die Position des Sensors beschreibt, mit folgendem Ansatz berechnet werden: $\begin{pmatrix} 1 \\ -5{,}75 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 32 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2{,}25 \\ z \end{pmatrix}$ 3 BE

Erläutern Sie den zugrundeliegenden geometrischen Sachverhalt.

3.3.3 Berechnen Sie im Modell die Koordinaten des Sensors S. 3 BE

Weisen Sie rechnerisch nach, dass der Sensor gleich weit von den Enden der Brücke entfernt ist.

Hinweis: Von den Wahlaufgaben 4 und 5 ist **eine** zu bearbeiten.

4 Wahlaufgabe Stochastik

In den beiden benachbarten Städten X-Stadt und Y-Stadt werden monatlich erscheinende Zeitungen verteilt.

4.1 Erfahrungsgemäß werden in X-Stadt 10 % der Zeitungen nicht gelesen. In einer Straße dieser Stadt werden 25 Zeitungen verteilt. Die Zufallsgröße X gibt dabei die Anzahl der nicht gelesenen Zeitungen an und wird als binomialverteilt angenommen.

4.1.1 Berechnen Sie den Wert von $P(X=2)$ und geben Sie die Bedeutung dieses Terms im Sachzusammenhang an. 2 BE

4.1.2 Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis: „Die Anzahl der nicht gelesenen Zeitungen beträgt mindestens eins, aber weniger als fünf.“ 2 BE

4.2 Die Anzahl der Zeitungen, die in einer vergleichbaren Straße in Y-Stadt nicht gelesen werden, wird durch die binomialverteilte Zufallsgröße Y beschrieben. Die Abbildung 1 zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung von Y für n = 25. 4 BE

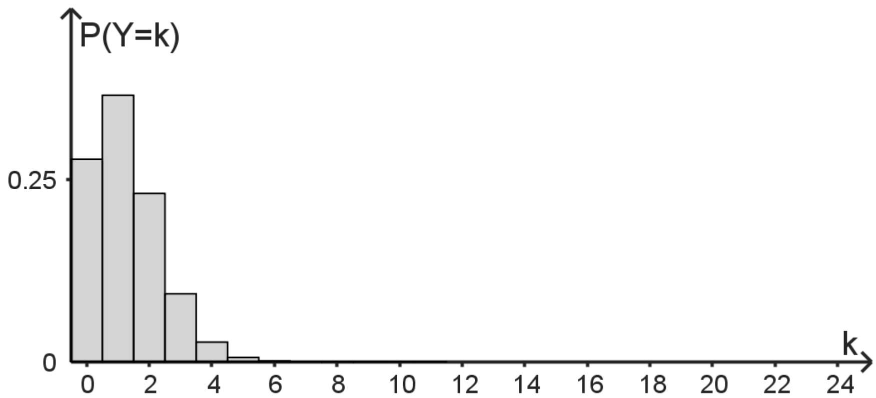


Abbildung 1

Beurteilen Sie für Y-Stadt mithilfe der Abbildung 1 die folgenden Aussagen:

(1) Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von den 25 Zeitungen weniger als zwei nicht gelesen werden, ist größer als 50 %.

(2) Es ist zu erwarten, dass der Anteil der nicht gelesenen Zeitungen 8 % beträgt.

4.3 In 40 % der Haushalte von X-Stadt leben Kinder. Es wird ein Haushalt in dieser Stadt zufällig ausgewählt. Dazu werden folgende Ereignisse betrachtet:

K: In dem ausgewählten Haushalt leben Kinder.

L: In dem Haushalt wird die Zeitung gelesen.

4.3.1 Vervollständigen Sie für diesen Sachverhalt die Vierfeldertafel in der Abbildung 2. 3 BE

	K	$\overline{K}$	
L		0,55	0,9
$\overline{L}$			
			1

Abbildung 2

Geben Sie den Anteil derjenigen Haushalte in X-Stadt an, in denen keine Kinder leben und die Zeitung nicht gelesen wird.

4.3.2 Der Zeitung wird eine neue Rubrik für Kinder hinzugefügt. Unter den Haushalten mit Kindern in X-Stadt erhöht sich dadurch der Anteil derjenigen Haushalte, in denen die Zeitung gelesen wird, auf 90 %. Auf das Leseverhalten in den Haushalten ohne Kinder hat diese Veränderung keinen Einfluss. 4 BE

Bestimmen Sie den Anteil aller Haushalte in X-Stadt, in denen die Zeitung jetzt gelesen wird.

5 Wahlaufgabe Stochastik

In einer Großstadt wurde bei einer Erhebung der Anteil der überbelegten Haushalte an allen Haushalten erfasst. Ein Haushalt gilt als überbelegt, wenn er über zu wenige Zimmer in Bezug auf die Anzahl der im Haushalt lebenden Personen verfügt.

In 28,5 % aller Haushalte lebt mindestens ein Kind. Von diesen Haushalten sind 15,9 % überbelegt. Bei den Haushalten ohne Kind beträgt der Anteil der überbelegten Haushalte 6,5 %.

5.1 Stellen Sie den Sachverhalt in einem beschrifteten Baumdiagramm dar. 3 BE

5.2 Zeigen Sie, dass etwa 9,18 % aller Haushalte überbelegt sind. 2 BE

5.3 Unter allen Haushalten der Großstadt werden 1000 Haushalte zufällig ausgewählt. Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der überbelegten Haushalte in der Stichprobe und wird als binomialverteilt angenommen.

5.3.1 Beurteilen Sie ohne Berechnung von Wahrscheinlichkeiten, die folgende Aussage: 2 BE

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X nimmt für 90 den größtmöglichen Wert an.

5.3.2 Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von den 1000 zufällig ausgewählten Haushalten höchstens k Haushalte überbelegt sind, soll mehr als 90 % betragen. 4 BE

Ermitteln Sie den kleinstmöglichen Wert für k.

5.4 Zwei Jahre später kann davon ausgegangen werden, dass in der Großstadt sich sowohl der Anteil der Haushalte mit mindestens einem Kind als auch der Anteil der überbelegten Haushalte an den Haushalten ohne Kind nicht verändert hat. 4 BE

Gegeben ist die Funktion f mit

$$f(x)=\frac{0{,}285\cdot(0{,}159-x)}{0{,}285\cdot(0{,}159-x)+0{,}715\cdot 0{,}065} \quad \text{und} \quad 0\le x\le 0{,}159\,.$$

Bestimmen Sie denjenigen Wert von x, für den $f(x)=0{,}4$ gilt, und interpretieren Sie diesen Wert von x sowie den Funktionswert von x im Sachzusammenhang.

Mecklenburg-Vorpommern

Abitur 2025

Mathematik (CAS)

Leistungskurs

Hinweise für die Lehrkraft
zur Durchführung, Korrektur und Bewertung
(nicht für die Hand des Prüflings)

Hinweise für die Lehrkraft

Aufgaben-bearbeitung:

Die Prüfungsarbeit besteht aus den Teilen A und B.

Der Prüfling erhält zunächst die Aufgaben für den Teil A mit den hilfsmittelfreien Aufgaben. Dieser beinhaltet

- 4 Pflichtaufgaben aus der Aufgabengruppe 1 (Aufgaben 1 bis 4),
- 6 Wahlaufgaben aus der Aufgabengruppe 2 (Aufgaben 5 bis 10).

Der Prüfling bearbeitet die vier Pflichtaufgaben und zwei Wahlaufgaben.

Nach Abgabe der Aufgaben des Teils A erhält der Prüfling die Aufgaben des Teils B sowie die dafür vorgesehenen Hilfsmittel. Der Prüfungsteil B beinhaltet

- eine Pflichtaufgabe Analysis (Aufgabe 1),
- zwei Wahlaufgaben Geometrie (Aufgaben 2 und 3) sowie
- zwei Wahlaufgaben Stochastik (Aufgaben 4 und 5).

Der Prüfling bearbeitet die Pflichtaufgabe Analysis, eine Wahlaufgabe Geometrie und eine Wahlaufgabe Stochastik.

Bearbeitungszeit:

Die Bearbeitungszeit für die Prüfungsteile A und B beträgt einschließlich Auswahlzeit 330 Minuten. Der Prüfling entscheidet selbstständig über den Zeitraum der Bearbeitung des Teils A, dieser Zeitraum darf jedoch maximal 110 Minuten betragen.

Hilfsmittel:

Dem Prüfling stehen folgende Hilfsmittel zur Verfügung:

- eine an der Schule eingeführte Formelsammlung (bzw. Tafelwerk),
- ein an der Schule zugelassenes Computeralgebrasystem (CAS),
- Zeichengeräte,
- ein Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung in gedruckter oder digitaler Form,
- ein zweisprachiges Wörterbuch in gedruckter oder digitaler Form für Prüflinge mit nichtdeutscher Herkunftssprache.

Für die Aufgaben des Teils A sind Formelsammlung (bzw. Tafelwerk) und CAS nicht zulässig.

Bewertung:

Die Lösungen sind in einer sprachlich korrekten, mathematisch exakten und äußerlich einwandfreien Form darzustellen. In der Niederschrift müssen die Lösungswege nachvollziehbar sein.

Im Teil A sind je Aufgabe 5 Bewertungseinheiten (BE) erreichbar, im Teil B in der Pflichtaufgabe 30 BE und in den Wahlaufgaben jeweils 20 BE. Bearbeitet ein Prüfling mehr Wahlaufgaben als gefordert, so wird jeweils die Aufgabe gewertet, welche die höchste Anzahl an BE erbringt.

Maximal zwei Bewertungseinheiten können zusätzlich vergeben werden bei guter Notation und Darstellung sowie eleganten, kreativen und rationellen Lösungswegen, maximal zwei Notenpunkte können bei mehrfachen Formverstößen abgezogen werden. Allein durch die Bearbeitung einer weiteren Wahlaufgabe im Teil A ist keine zusätzliche Bewertungseinheit erreichbar.

Bewertungstabelle – Leistungskurs, Teile A und B

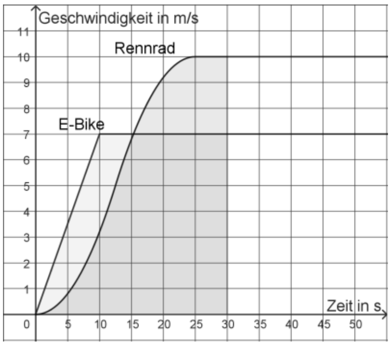
Bewertungseinheiten	Notenpunkte
95 bis 100	15
90 bis 94	14
85 bis 89	13
80 bis 84	12
75 bis 79	11
70 bis 74	10
65 bis 69	09
60 bis 64	08
55 bis 59	07
50 bis 54	06
45 bis 49	05
40 bis 44	04
33 bis 39	03
27 bis 32	02
20 bis 26	01
0 bis 19	00

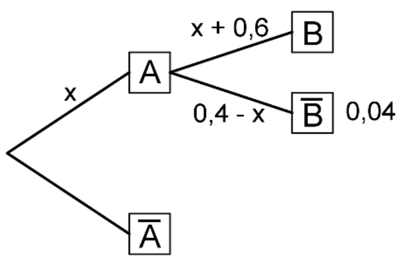
Die Verteilung der Bewertungseinheiten auf die Teilaufgaben ist verbindlich.

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

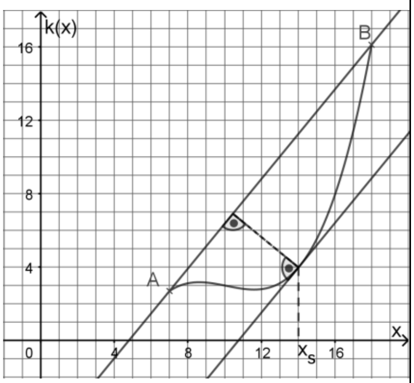
Teil A Erwartungshorizont

Aufgabe	Pflichtaufgaben – Aufgabengruppe 1	mögliche BE	erteilte BE
1.1	$f'(x)=\frac{3}{4}x^2-3$; $f'(2)=0$	2	
1.2	Graph II Der Graph jeder Stammfunktion F von f hat im Punkt $(2\|F(2))$ einen Wendepunkt.	3	
2.1	$\int_0^{\pi} f(x)\,dx=0$	1	
2.2	$3a\cdot\cos(0)+b\cdot 0=-3 \Leftrightarrow a=-1$ $3a\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+b\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3}{4}\pi \Leftrightarrow b=\frac{3}{2}$	4	
3.1	$B(2\|3\|2)$	1	
3.2	P hat die Koordinaten $(0\|y\|z)$. Es gilt: $\begin{pmatrix}-4\\4\\0\end{pmatrix}=k\cdot\begin{pmatrix}-2\\y+1\\z-6\end{pmatrix} \Leftrightarrow k=2;\ y=1;\ z=6$	4	
4.1	Es gibt für jeden Bewerbenden zwei Möglichkeiten, eine Teilnahme an der Show oder keine Teilnahme. Da die Auswahl aus einer sehr großen Anzahl von Bewerbenden zufällig erfolgt, kann davon ausgegangen werden, dass die Wahrscheinlichkeit für eine Auswahl bei jedem einzelnen Freund gleich groß ist.	2	
4.2	$E(X)=1$	1	
4.3	$P(X\geq 1)=1-\left(\frac{3}{4}\right)^4=1-\frac{81}{256}=\frac{175}{256}$	2	
	Summe:	**20**	

Aufgabe	Wahlaufgaben – Aufgabengruppe 2	mögliche BE	erteilte BE
5.1	Nach ca. 15 Sekunden fahren beide mit derselben Geschwindigkeit.	1	
5.2	 Gesucht ist die Lösung der Gleichung $\int_0^x f_R(t)\,dt = \int_0^x f_E(t)\,dt$. Durch Zählen der Kästchen unterhalb des jeweiligen Graphen lässt sich diese ermitteln. Für $x = 30$ sind beide Flächen jeweils 35 Kästchen groß.	4	
6.1	$f_a(0) = e^0 - a \cdot 0^2 = 1$	1	
6.2	An der Stelle 0 ist der Graph von f_a ansteigend und liegt dort oberhalb der x-Achse. Da die Flächenbilanz für das Intervall $[0;b]$ ausgeglichen ist und f_a bei b eine Nullstelle besitzt, muss der Graph mindestens zweimal seine Monotonie ändern. Folglich gibt es mindestens zwei lokale Extrempunkte zwischen 0 und b.	4	
7.1	z. B.: $x = 2$	1	
7.2	Mittelpunkt des Rechtecks ABCD: $M(2\,\vert\,3\,\vert\,0)$ Mittelpunkt des Rechtecks EFGH: $M^*(2\,\vert\,3\,\vert\,5)$ Da das Rechteck EFGH zum Rechteck ABCD ähnlich ist und den vierfachen Flächeninhalt besitzt, haben die Diagonalen des Rechtecks EFGH die doppelte Länge wie die Diagonalen des Rechtecks ABCD. Folglich gilt $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AM^*} + 2 \cdot \overrightarrow{MB}$.	4	

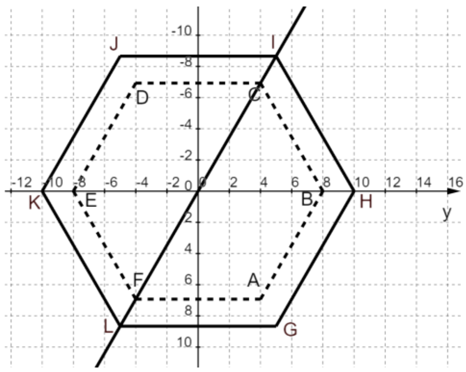
8.1	Aus $0 = 3k - r$ folgt $r = 3k$. Eingesetzt in $0 = 5 - 6k + 2r$ führt das zur falschen Aussage $0 = 5$.	2	
8.2	Der Vektor $\begin{pmatrix} 5-6k \\ 3k \\ 4-9k \end{pmatrix}$ kann geschrieben werden als $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} - 3k \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Für jeden Wert von k kann g_k somit beschrieben werden durch $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + r' \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ mit $r' = r - 3k$. Folglich ist die Aussage wahr.	3	
9.1	Bis auf Vertauschung der Faktoren sind $2 \cdot 5$ und $3 \cdot 5$ die einzigen Möglichkeiten, 10 bzw. 15 als Produkt aus zwei erzielten Zahlen darzustellen. Somit sind die betrachteten Wahrscheinlichkeiten gleich groß.	2	
9.2	Das Produkt ist genau dann gleich 2, 3 oder 5, wenn eine der n erzielten Zahlen 2, 3 bzw. 5 ist und sonst nur Einsen erzielt werden. Ein Term für die beschriebene Wahrscheinlichkeit ist also $3 \cdot n \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$.	3	
10	Mit $x = P(A)$ gilt:  $x \cdot (0{,}4 - x) = 0{,}04 \Leftrightarrow x^2 - 0{,}4x + 0{,}04 = 0 \Leftrightarrow x = 0{,}2$	5	
	Summe:	**10**	

Teil B Erwartungshorizont

Aufgabe	Analysis – Pflichtaufgabe	mögliche BE	erteilte BE
1.1	$S_y(0 \mid -26)$ $\lim\limits_{x\to\infty} f_a(x) = \infty \qquad \lim\limits_{x\to-\infty} f_a(x) = -\infty$	3	
1.2	$f_a''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{91}{9}$ $f_a\left(\frac{91}{9}\right) = \frac{91}{9} \cdot a - \frac{1069471}{12150}$ Die Ortskurve der Wendepunkte ist eine Gerade.	4	
1.3	Die Graphen der ganzrationalen Funktionen dritten Grades besitzen einen Wendepunkt sowie keine oder zwei Extrempunkte. Aufgrund des positiven Koeffizienten vor x^3 ist beim Fehlen von Extrempunkten der Graph durchgehend monoton steigend. Existieren im Verlauf des Graphen noch zwei Extrempunkte, so muss bei diesen ein Monotoniewechsel stattfinden, sodass der Tangentenanstieg beim dazwischen liegenden Wendepunkt negativ ist.	3	
1.4.1	$k(x) = 4 \quad \rightarrow \quad x \approx 14{,}0\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ $k'(x) = 1 \quad \rightarrow \quad x \approx 13{,}8\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \quad (x \approx 6{,}5 < 7 \text{ entfällt})$ Die beiden Ergebnisse für die Laktatschwelle entsprechen einander näherungsweise.	5	
1.4.2	Sekantensteigung: $\frac{k(18) - k(7)}{18 - 7} = 1{,}22$ $k'(x_s) = 1{,}22$ $\Rightarrow x_s = \frac{\sqrt{1279}}{9} + \frac{91}{9} \approx 14{,}1$ $(x \approx 6{,}1 < 7 \text{ entfällt})$  	5	

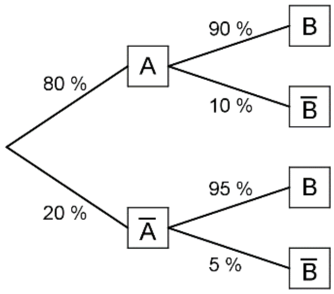
1.5.1	Der Anstieg der Sauerstoffaufnahme strebt mit zunehmender Zeit gegen null, d. h. die Sauerstoffaufnahme nähert sich einem Grenzwert, dem Sättigungswert SW, an.	2	
1.5.2	$\lim\limits_{t\to\infty} s(t)=0{,}8 \;\Rightarrow\; c=0{,}8$ $s(5)=0{,}25 \;\Rightarrow\; b=-\frac{1}{5}\cdot\ln\left(\frac{470}{11}\right)\approx -0{,}75$	4	
1.5.3	$\int\limits_5^{10}\left(0{,}8-s(t)\right)dt\approx 0{,}72$ Das Sauerstoffdefizit entspricht einem Sauerstoffvolumen von 0,72 Litern.	4	
	Summe:	**30**	

Aufgabe	Analytische Geometrie – Wahlaufgaben	mögliche BE	erteilte BE
2.1	Wegen $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}-4\\0\\0\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}$ sind nicht alle Seiten gleich lang und somit ist ABCD kein Quadrat. Volumen der Pyramide ABCDS: $\frac{1}{3}\cdot 4\cdot 3\cdot 5=20$	4	
2.2	Ortsvektor des Punkts F_1: $\begin{pmatrix}0\\1\\27\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{F_1F_2}=\begin{pmatrix}0\\1\\-3\end{pmatrix}$	2	
2.3	Der Körper ABCDS ist eine Pyramide mit der Höhe 5. Der Körper $ABCDE_kF_k$ ist nur für $k=10$ eine Pyramide. Da diese Pyramide die Höhe 10 besitzt, ist der zusammengesetzte Körper nicht symmetrisch bezüglich der xz-Ebene.	3	

2.4	$\overrightarrow{CD}\circ\vec{n}=0 \wedge \overrightarrow{CS}\circ\vec{n}=0$ liefert $\vec{n}=\begin{pmatrix}0\\-3\\5\end{pmatrix}$ als Normalenvektor von L. Somit hat L eine Gleichung der Form $-3y+5z=d$. Aus $S\in L$ folgt $d=15$. Einsetzen der Koordinaten von F_k in die Ebenengleichung ergibt $k=7{,}5$.	5	
2.5	Das Dreieck DF_kC ist gleichschenklig mit der Basis $\overline{CD}$. Mit M wird der Mittelpunkt von $\overline{CD}$ bezeichnet. Der Winkel an der Spitze ist umso größer, je kleiner die Höhe $\left\lvert\overline{MF_k}\right\rvert$ des Dreiecks ist. Diese Höhe wird minimal, wenn der Vektor $\overrightarrow{MF_k}$ senkrecht zum Richtungsvektor der Gerade g steht. Aus $\begin{pmatrix}0\\k\\27-3k\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0\\1\\-3\end{pmatrix}=0$ folgt $k=8{,}1$.	6	
3.1	$\left\lvert\overrightarrow{LS}\right\rvert=\left\lvert\begin{pmatrix}0-5\sqrt{3}\\0-(-5)\\25-15\end{pmatrix}\right\rvert=10\sqrt{2}$ Die Länge eines Balkens beträgt etwa 1,41 m.	2	
3.2	$A=6\cdot\frac{1}{2}\cdot\left\lvert\overrightarrow{LG}\right\rvert\cdot\left\lvert\overrightarrow{M_{LG}S}\right\rvert=6\cdot\frac{1}{2}\cdot 10\cdot\sqrt{\left(5\sqrt{3}\right)^2+10^2}=150\sqrt{7}$ Die Dachfläche hat eine Größe von etwa $4\,m^2$.	3	
3.3	$\left\lvert\overrightarrow{OA}\right\rvert=\left\lvert\overrightarrow{OB}\right\rvert \Leftrightarrow \left\lvert\begin{pmatrix}x\\4\\0\end{pmatrix}\right\rvert=\left\lvert\begin{pmatrix}0\\8\\0\end{pmatrix}\right\rvert \Rightarrow x=4\sqrt{3}$	3	
3.4		1	

3.5.1	$\cos\alpha = \dfrac{\left\lvert \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -\frac{23}{15}\sqrt{3} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rvert}{\left\lvert \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -\frac{23}{15}\sqrt{3} \end{pmatrix} \right\rvert \cdot \left\lvert \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rvert}$ liefert $\alpha \approx 20{,}6^\circ$ Der Winkel zwischen Lichtstrahl und Untergrund ist etwa 70° groß.	3	
3.5.2	Der Parameter k wirkt sich ausschließlich mit $-k$ auf die z-Richtung des Richtungsvektors aus. Da $\frac{25}{15}\sqrt{3} > \frac{23}{15}\sqrt{3}$ gilt, verläuft der Lichtstrahl steiler zum Boden des Spielturms.	2	
3.6	Die Mastspitze hat die Koordinaten $(0\,\vert\,0\,\vert\,30)$. Positionen K_r der Augen des Kindes: $\begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ Das Kind blickt von unterhalb der Dachkante $\overline{LG}$ Richtung Mastspitze. Ebene durch die Punkte L, G und K_r: $\vec{x}_E = \overrightarrow{OL} + s \cdot \overrightarrow{LG} + t \cdot \overrightarrow{LK_r}$ $\vec{x}_E = \begin{pmatrix} 5\cdot\sqrt{3} \\ -5 \\ 15 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \left(\begin{pmatrix} 8+3r \\ 2+r \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5\cdot\sqrt{3} \\ -5 \\ 15 \end{pmatrix} \right)$ Die Mastspitze kann erstmals gesehen werden, wenn gilt: $\vec{x}_E = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 30 \end{pmatrix} \Rightarrow r = \dfrac{4\cdot\left(5\sqrt{3}-6\right)}{9} \wedge s = \dfrac{10\sqrt{3}+27}{9} \wedge t = -3$ Das Kind muss bis zur Position $\left(\frac{20\sqrt{3}}{3} \,\middle\vert\, \frac{20\sqrt{3}}{9} - \frac{2}{3} \,\middle\vert\, 0 \right) \approx (11{,}54\,\vert\,3{,}18\,\vert\,0)$ laufen.	6	
	Summe:	**20**	

<table>
<tr><th>Aufgabe</th><th>Stochastik – Wahlaufgaben</th><th>mögliche BE</th><th>erteilte BE</th></tr>
<tr><td>4.1</td><td>Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Styroporflieger einen Farbfehler und keinen Stanzfehler hat, beträgt 2 %.</td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>4.2</td><td><table><tr><td></td><td>F</td><td>$\overline{F}$</td><td></td></tr><tr><td>S</td><td>0,005</td><td>0,005</td><td>0,01</td></tr><tr><td>$\overline{S}$</td><td>0,02</td><td>0,97</td><td>0,99</td></tr><tr><td></td><td>0,025</td><td>0,975</td><td>1</td></tr></table>$P(S \cap F) = 0{,}005$</td><td>4</td><td></td></tr>
<tr><td>4.3</td><td>$P_{\overline{S}}\left(\overline{F}\right) = \frac{P\left(\overline{S} \cap \overline{F}\right)}{P\left(\overline{S}\right)} = \frac{0{,}97}{0{,}99} \approx 0{,}98$</td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>4.4</td><td>Mindestens 24 Flieger haben einen Stanzfehler.</td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>4.5</td><td>$P_{0{,}01}^{2000}(X \geq 28) \approx 0{,}052$
$P_{0{,}01}^{2000}(X \geq 29) \approx 0{,}034$
Die Nullhypothese wird verworfen, wenn mehr als 28 Styroporflieger mit Stanzfehler festgestellt werden.</td><td>5</td><td></td></tr>
<tr><td>4.6</td><td>Mögliche Anzahlen je Tüte: <table><tr><td>historische Flugmodelle</td><td>2</td><td>4</td><td>6</td></tr><tr><td>moderne Flugmodelle</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr></table>Mögliche Kombinationen:
$\binom{7}{2} \cdot \binom{6}{1} = 126$ $\binom{7}{4} \cdot \binom{6}{2} = 525$ $\binom{7}{6} \cdot \binom{6}{3} = 140$
Es sollten vier historische und zwei moderne Modelle in einer Tüte sein.</td><td>5</td><td></td></tr>
</table>

5.1.1	X: Anzahl der Radausflügler $P_{0,14}^{300}(X=36)\approx 4\,\%$	1	
5.1.2	$\mu = 300\cdot 0{,}14 = 42$ $P_{0,14}^{300}(X\geq 47)\approx 22\,\%$	3	
5.2.1	 A: „Die Fahrkarte wird spätestens am Vortag gebucht.“ B: „Die Fahrkarte wird genutzt.“	3	
5.2.2	$P_{\overline{B}}(A)=\frac{0{,}8\cdot 0{,}1}{P(\overline{B})}=\frac{0{,}08}{P(\overline{B})}$ $P_{\overline{B}}(\overline{A})=\frac{0{,}2\cdot 0{,}05}{P(\overline{B})}=\frac{0{,}01}{P(\overline{B})}$ Die Aussage ist richtig.	3	
5.2.3	Y: Anzahl der Radausflügler $P_{0,14}^{500}(Y\geq 81)\approx 9{,}0\,\%$, $P_{0,14}^{500}(Y\geq 82)\approx 7{,}1\,\%$ Befinden sich mindestens 82 Radausflügler in der Stichprobe, so wird die Nullhypothese abgelehnt.	5	
5.2.4	$P_{0,20}^{200}(Y\leq 35)\approx 22\,\%$, $P_{0,21}^{200}(Y\leq 35)\approx 13\,\%$ Der tatsächliche Anteil der Radausflügler müsste mindestens 21 % betragen. Obwohl der Anteil der Radausflügler auf über 14 % gestiegen ist, entscheidet man sich aufgrund des Testergebnisses dafür, den Betrieb der Shuttlebusse einzustellen.	5	
	Summe:	**20**	

Teil A Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1.1	2	I				I		2		
1.2	3	II	II		II				3	
2.1	1	I			II				1	
2.2	4	I	I			II		2	2	
3.1	1				I	I		1		
3.2	4	I	II			II		1	3	
4.1	2	II		II			II		2	
4.2	1			I		I		1		
4.3	2			II		I		1	1	
5.1	1					I		1		
5.2	4	III	III		II		III		1	3
6.1	1				I			1		
6.2	4	III	III		III		II		1	3
7.1	1				I	I		1		
7.2	4	III	III		II	II	III		1	3
8.1	2	II	II			II			2	
8.2	3	III	III		II	II	III			3
9.1	2	II	I		I		I	1	1	
9.2	3	III	III	II		II	III			3
10	5	III	III		II	II			2	3

Teil B Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1.1	3					I		X		
1.2	4	I			I	I		X		
1.3	3	II	II		II		II		X	
1.4.1	5			II	I	II	II		X	
1.4.2	5	II	III		III	II				X
1.5.1	2	II		II	II		II		X	
1.5.2	4	I		II	II	I			X	
1.5.3	4	III	III	III	II					X
2.1	4	I	I			I		X		
2.2	2		II		I	I			X	
2.3	3	II			I		II		X	
2.4	5	II	II			I			X	
2.5	6	III	III		II	II	III			X
3.1	2			I		I		X		
3.2	3		I	I		I	I	X		
3.3	3	II	II		II	I			X	
3.4	1	II			II				X	
3.5.1	3		II	II		II			X	
3.5.2	2	II		II	II		II		X	
3.6	6		III	III		II	II			X
4.1	2			I			II		X	
4.2	4	I		I	I		I	X		
4.3	2		II	II		I	I		X	
4.4	2			II	II		I		X	
4.5	5	II	II			II	II		X	
4.6	5	III	III	II		II				X
5.1.1	1			I			I	X		
5.1.2	3		II	II		I			X	
5.2.1	3		I		I		I	X		
5.2.2	3	II	II	II		II			X	
5.2.3	5	II	II			II	II		X	
5.2.4	5	II	III	III		II	II			X