Abiturprüfung 2025

Mathematik, Grundkurs

Vorblatt zum Prüfungsteil A: Aufgaben ohne Hilfsmittel

Für die Bearbeitung der Aufgaben des Prüfungsteils A sind Zeichengeräte und ein Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung zugelassen. Eine Verwendung von weiteren Hilfsmitteln ist nicht zulässig.

Sie müssen den Prüfungsteil A spätestens 100 Minuten nach Prüfungsbeginn abgeben. Die Hilfsmittel Taschenrechner und Formelsammlung erhalten Sie nach Abgabe von Prüfungsteil A.

Sie müssen die **drei Pflichtaufgaben und zwei Wahlpflichtaufgaben** im Prüfungsteil A bearbeiten.

Tragen Sie die Aufgabennummern der zwei Wahlpflichtaufgaben ein, die bewertet werden sollen.

Wahlpflichtaufgabe Nr. ________

Wahlpflichtaufgabe Nr. ________

Bestätigen Sie Ihre Entscheidung mit Ihrer Unterschrift.

Name, Vorname des Prüflings: ______________________________

Unterschrift des Prüflings: ______________________________

Name: ____________________

Abiturprüfung 2025

Mathematik, Grundkurs

Prüfungsteil A: Aufgaben ohne Hilfsmittel

Die folgenden drei Pflichtaufgaben müssen alle bearbeitet werden.

Pflichtaufgabe 1

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit

$$f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{8}x^2 - 1\,.$$

Abbildung 1 zeigt den Graphen G von f.

Die Tangente an G im Punkt $P(4\,|\,1)$ wird mit t bezeichnet.

(1) *Bestimmen Sie rechnerisch eine Gleichung von t.*

(2) Es gibt genau eine weitere Tangente an G, die parallel zu t verläuft.

Skizzieren Sie diese in Abbildung 1.

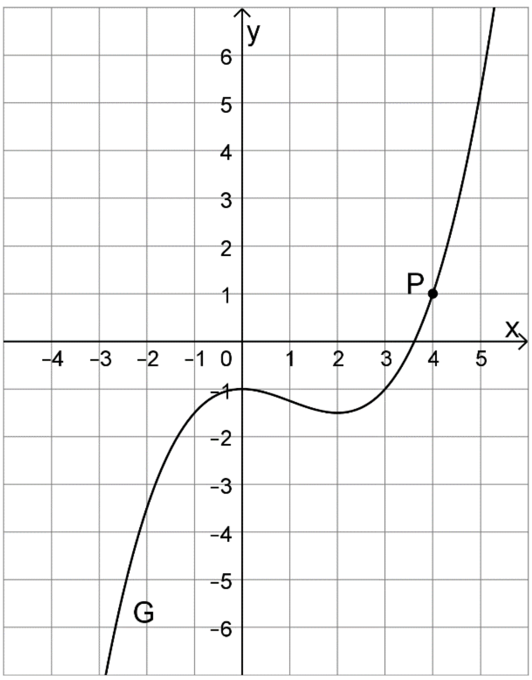


Abbildung 1

(3 + 2 Punkte)

Name: ____________________

Pflichtaufgabe 2

Gegeben ist die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ mit $s \in \mathbb{R}$.

(1) *Zeigen Sie, dass der Punkt* $P(4\,|\,3\,|\,3)$ *nicht auf g liegt.*

Geben Sie die Koordinaten eines Punktes Q an, der auf g liegt und sich nur in einer Koordinate von P unterscheidet.

(2) Die Gerade *h* verläuft parallel zur *y*-Achse und schneidet *g* im Punkt $(8\,|\,3\,|\,-3)$.

Untersuchen Sie, ob g und h senkrecht zueinander verlaufen.

(3 + 2 Punkte)

Pflichtaufgabe 3

Ein Glücksrad mit acht gleich großen Sektoren ist wie abgebildet beschriftet. Das Glücksrad wird zweimal gedreht.

(1) *Interpretieren Sie den Term* $\left(\frac{3}{8}\right)^2$ *im Sachzusammenhang.*

(2) *Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Summe der erzielten Zahlen ungerade ist.*

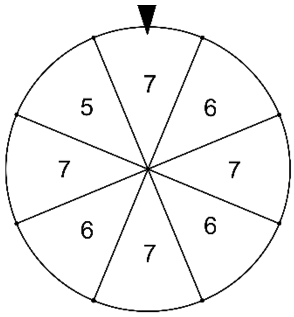


Abbildung 2

(2 + 3 Punkte)

Hinweis:

Zeichengeräte sowie ein Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung sind zugelassen.

Name: ____________________

Abiturprüfung 2025

Mathematik, Grundkurs

Prüfungsteil A: Aufgaben ohne Hilfsmittel

Von diesen sechs Wahlpflichtaufgaben müssen <u>zwei beliebige Aufgaben</u> bearbeitet werden.

Wahlpflichtaufgabe 1

Gegeben ist die in $I\!R$ definierte ganzrationale Funktion h mit $h(x) = 4x^3 - 6x$.

(1) *Bestimmen Sie eine Gleichung der Stammfunktion H von h, deren Graph durch den Punkt* $(1\,|\,0)$ *verläuft.*

(2) *Begründen Sie, ohne zu rechnen, dass* $\int_{-3}^{3} h(x)\,\mathrm{d}x = 0$ *ist.*

(3 + 2 Punkte)

Wahlpflichtaufgabe 2

Abbildung 1 zeigt den Graphen der in $I\!R$ definierten Funktion g mit $g(x) = 2\mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}$.

(1) *Weisen Sie nach, dass* 1 *eine Nullstelle von g ist.*

(2) Der Graph von g schließt mit den Koordinatenachsen eine Fläche ein.

Berechnen Sie ihren Inhalt.

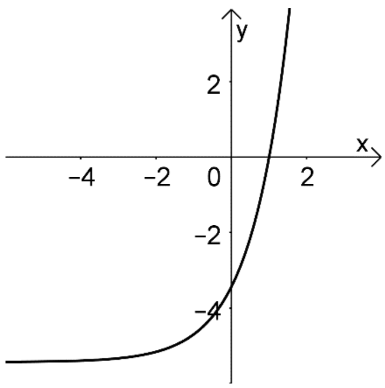


Abbildung 1

(1 + 4 Punkte)

Name: ____________________

Wahlpflichtaufgabe 3

Betrachtet werden die Punkte $P(3|1|-1)$ und $Q(4|2|-4)$.

(1) *Begründen Sie, dass die Punkte P und Q auf derselben Seite bezüglich der xy-Ebene liegen*.

(2) Die Punkte P, Q und der Koordinatenursprung O sind die Eckpunkte eines gleichschenkligen Dreiecks, dessen Basis $\overline{OQ}$ die Länge 6 LE hat.

Ermitteln Sie den Flächeninhalt des Dreiecks.

(1 + 4 Punkte)

Wahlpflichtaufgabe 4

Die Ebene E wird durch die Gleichung $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\-3\\0\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-3\\4\\1\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}3\\-4\\0\end{pmatrix}$ mit $r,s\in\mathbb{R}$

beschrieben.

(1) *Zeigen Sie, dass der Vektor* $\begin{pmatrix}4\\3\\0\end{pmatrix}$ *senkrecht zur Ebene E steht*.

(2) *Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punkts P mit folgender Eigenschaft*:

Wird der Punkt P an der Ebene E gespiegelt, so hat der entstehende Punkt vom Punkt P den Abstand 20 LE.

(2 + 3 Punkte)

Name: ____________________

Wahlpflichtaufgabe 5

Abbildung 2 zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer binomialverteilten Zufallsgröße X mit den Parametern n und $p = 0{,}5$.

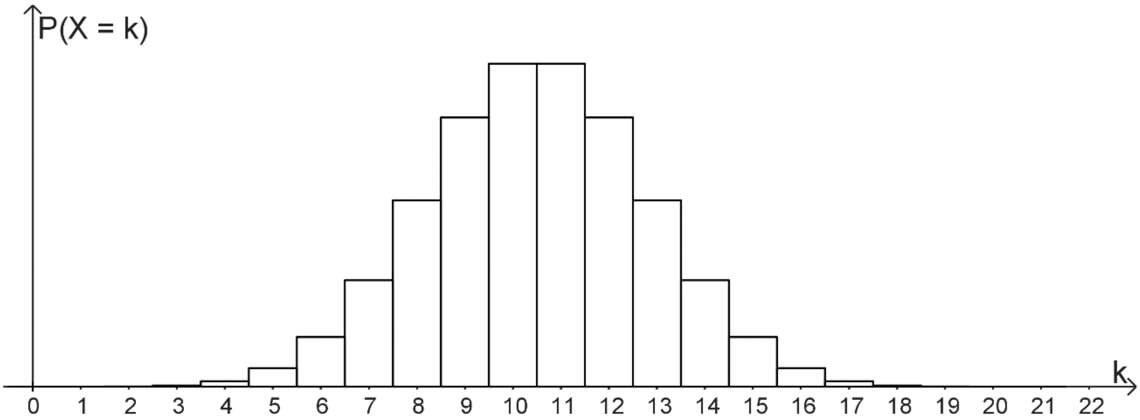


Abbildung 2

(1) Es gilt $P(X = 10) = P(X = 11)$.

Begründen Sie, dass n nicht gerade ist.

(2) Es gilt $P(X \geq 9) \approx 0{,}81$ und $P(X = 12) \approx 0{,}14$.

Berechnen Sie unter Verwendung dieser Werte näherungsweise die Wahrscheinlichkeit $P(X = 10)$.

(2 + 3 Punkte)

Name: ____________________

Wahlpflichtaufgabe 6

In einer Urne befinden sich 40 blaue Kugeln.

(1) Die 40 blauen Kugeln in der Urne werden durch rote Kugeln ergänzt. Die Wahrscheinlichkeit, beim zufälligen Ziehen einer Kugel eine blaue Kugel zu erhalten, beträgt nun 80 %.

Bestimmen Sie, wie viele rote Kugeln ergänzt wurden.

(2) In einer anderen Urne befinden sich 40 blaue und 20 rote Kugeln.

(i) *Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Ziehung von drei Kugeln mit Zurücklegen genau zwei blaue Kugeln gezogen werden.*

(ii) Die Zufallsgröße X beschreibt, wie viele blaue Kugeln bei der Ziehung von drei Kugeln mit Zurücklegen gezogen werden.

Die Zufallsgröße Y beschreibt, wie viele blaue Kugeln bei der Ziehung von n Kugeln mit Zurücklegen gezogen werden.

Die Standardabweichung von Y ist doppelt so groß wie die Standardabweichung von X.

Geben Sie n an.

(2 + 3 Punkte)

Hinweis:

Zeichengeräte sowie ein Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung sind zugelassen.

Name: ____________________

Abiturprüfung 2025

Mathematik, Grundkurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

Aufgabenstellung:

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x)=\frac{1}{100}\cdot(x-6)\cdot e^{-0{,}17x+6}$.

a) *Geben Sie die Koordinaten des Schnittpunktes des Graphen von f mit der y-Achse sowie das Verhalten von f für* $x \to -\infty$ *und* $x \to +\infty$ *an.*

(3 Punkte)

b) Im Folgenden wird die Lösung zu einer Aufgabenstellung in Bezug auf den Graphen von f dargestellt:

$$f''(x)=0 \iff x=\frac{302}{17}.$$

$$f'''\left(\frac{302}{17}\right)\neq 0.$$

$$f'\left(\frac{302}{17}\right)<0.$$

Geben Sie die sich daraus ergebenden Eigenschaften des Graphen von f im Punkt $\left(\frac{302}{17}\,\middle|\,f\left(\frac{302}{17}\right)\right)$ *an.*

(3 Punkte)

c) Der Graph von f schließt mit den beiden Koordinatenachsen eine Fläche ein. Die Fläche soll durch eine Gerade, die parallel zur y-Achse verläuft, in zwei gleich große Teilflächen zerlegt werden.

Bestimmen Sie eine Gleichung dieser Gerade.

(4 Punkte)

Name: ____________________

Ein Mobilfunkanbieter betreibt eine Hotline, die an jedem Tag 24 Stunden erreichbar ist. Die Wartezeit eines Anrufers dieser Hotline ist abhängig vom Zeitpunkt des Anrufs. Durch die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion *w* mit

$$w(x) = 100 \cdot f(x) = (x-6) \cdot e^{-0{,}17x+6}$$

kann die Wartezeit an einem bestimmten Tag für die Zeitpunkte von 8:00 Uhr bis einschließlich 22:00 Uhr beschrieben werden.

Dabei bezeichnet *x* den Zeitpunkt des Anrufs in Stunden nach 0:00 Uhr und $w(x)$ die Wartezeit in Sekunden. Nimmt *w* beispielsweise an der Stelle $10{,}25$ den Wert von etwa 300 an, so beträgt die Wartezeit für einen Anruf um 10:15 Uhr etwa 300 Sekunden.

d) (1) *Berechnen Sie die Wartezeit für einen Anruf um* 9:00 *Uhr.*

(2) Ein anderer Anruf erfolgt später als 9:00 Uhr und hat eine Wartezeit von 200 Sekunden.

Bestimmen Sie rechnerisch die Uhrzeit dieses Anrufs.

(4 Punkte)

e) *Ermitteln Sie rechnerisch für den Zeitraum von* 8:00 *Uhr bis einschließlich* 22:00 *Uhr den Zeitpunkt eines Anrufs, zu dem die Wartezeit am längsten ist, und den Zeitpunkt eines Anrufs, zu dem die Wartezeit am kürzesten ist.*

(6 Punkte)

Name: ____________________

f) Die *Abbildung* zeigt den Graphen von w für $8 \leq x \leq 22$.

Für reelle Zahlen a und b mit $8 \leq a < b \leq 22$ gilt:

Wenn $\int_a^b (250 - w(x))\,\mathrm{d}x = 0$ ist, so beträgt die durchschnittliche Wartezeit für Anrufe zwischen den durch a und b gegebenen Zeitpunkten 250 Sekunden.

Bestimmen Sie durch geeignete Eintragungen in der Abbildung jeweils einen möglichen Wert für a und b, sodass zwischen den zugehörigen Zeitpunkten die durchschnittliche Wartezeit 250 *Sekunden beträgt.*

Beschreiben Sie Ihr Vorgehen.

Abbildung

(5 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Name: ____________________

Abiturprüfung 2025

Mathematik, Grundkurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

Aufgabenstellung:

a) Um Regenwasser zu speichern, wird es kontrolliert in ein unterirdisches Auffangbecken geleitet, das ein Fassungsvermögen von $800\ \text{m}^3$ hat.

Für ein bestimmtes Regenereignis wird das Volumen des Regenwassers im Auffangbecken für $0 \le x \le 5$ modellhaft durch die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion v mit

$$v(x) = -\frac{5}{2} \cdot x^4 + \frac{50}{3} \cdot x^3 + 190$$

beschrieben. Dabei ist x die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Stunden und $v(x)$ das Wasservolumen in Kubikmetern.

(1) *Begründen Sie, dass zu Beobachtungsbeginn das Wasservolumen im Auffangbecken* $190\ \text{m}^3$ *beträgt, und berechnen Sie das Volumen des Wassers, das in den ersten* $1{,}5\ \text{h}$ *nach Beobachtungsbeginn in das Auffangbecken fließt.*

Betrachtet wird außerdem die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion r mit

$$r(x) = 10 \cdot x^2 \cdot (5 - x).$$

(2) *Zeigen Sie, dass die momentane Änderungsrate des Volumens des Wassers im Auffangbecken in* $\frac{\text{m}^3}{\text{h}}$ *für den betrachteten Zeitraum durch r beschrieben werden kann.*

(3) *Weisen Sie anhand des gegebenen Terms von r nach, dass für den durch* $0 < x < 5$ *beschriebenen Zeitraum das Volumen des Wassers im Auffangbecken zu jedem Zeitpunkt zunimmt.*

Name: ____________________

(4) Es wird geplant, zwei Stunden nach Beobachtungsbeginn eine Pumpe einzuschalten, die Wasser aus dem Auffangbecken mit einer konstanten Rate von $100\,\frac{\text{m}^3}{\text{h}}$ abpumpt.

Die momentane Zuflussrate des Regenwassers in das Auffangbecken wird dabei weiterhin durch *r* beschrieben.

Die Gleichung

$$190+\int_0^2 r(x)\,\mathrm{d}x+\int_2^t \left(r(x)-100\right)\mathrm{d}x=400$$

hat für $2\leq t\leq 5$ genau eine Lösung t_0.

Geben Sie die Bedeutung von t_0 im Sachzusammenhang an und erläutern Sie den Aufbau der Gleichung in Bezug auf diese Bedeutung.

(3 + 3 + 3 + 5 Punkte)

b) Gegeben sind die in $I\!R$ definierte Funktion f mit $f(x)=x^2\cdot(x-5)^2$ und die Stelle $x_W=\frac{15-5\sqrt{3}}{6}$.

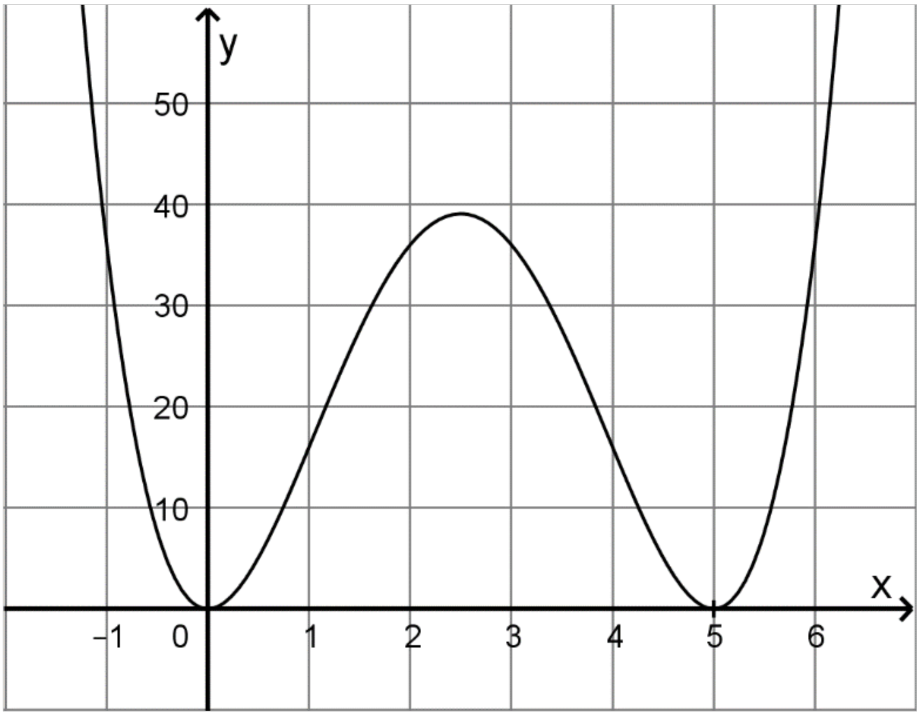
Der Graph von f ist in der *Abbildung* auf der folgenden Seite dargestellt.

(1) *Weisen Sie rechnerisch nach, dass x_W eine Wendestelle von f ist.*

(2) Es gibt im ersten Quadranten ein Flächenstück, das von der *y*-Achse, dem Graphen von f und der Gerade parallel zur *x*-Achse, die durch den Wendepunkt $\left(x_W\,|\,f(x_W)\right)$ verläuft, eingeschlossen wird.

Berechnen Sie den Inhalt dieses Flächenstücks.

Name: ____________________



Abbildung

(3) Die *Abbildung* zeigt den Graphen von f.

Die Punkte $A(u\,|\,f(u))$, $B(1\,|\,0)$, $C(4\,|\,0)$ und $D(5-u\,|\,f(5-u))$ sind für jeden Wert von u mit $0<u<2{,}5$ die Eckpunkte eines symmetrischen Trapezes.

Skizzieren Sie das symmetrische Trapez für $u=1{,}5$ in der Abbildung.

Ermitteln Sie einen Term, der den Flächeninhalt des symmetrischen Trapezes in Abhängigkeit von u angibt.

(3 + 3 + 5 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Name: ____________________

Abiturprüfung 2025

Mathematik, Grundkurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

Aufgabenstellung:

Betrachtet wird ein gerades Prisma mit den Eckpunkten *A*, *B*, *C*, *D*, *E* und *F*.

Seine Grundfläche ist das Dreieck *ABC*.

$A(-2|0|0)$, $B(2|0|0)$, $C(0|8|0)$, $D(-2|0|4)$, $E(2|0|4)$, $F(0|8|4)$.

a) *Abbildung 1* zeigt die Kante $\overline{BC}$ des Prismas.

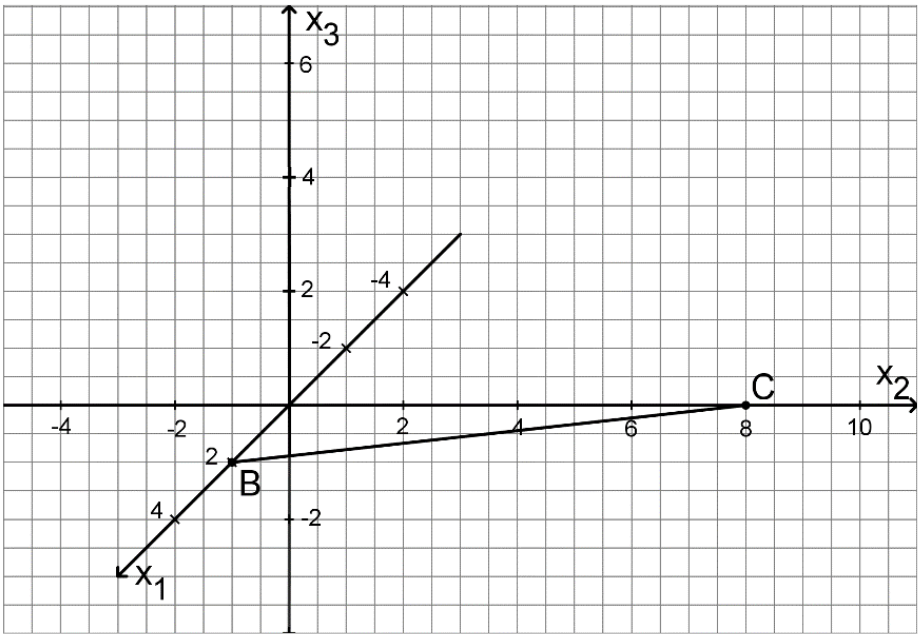


Abbildung 1

Zeichnen Sie das Prisma in Abbildung 1 ein und berechnen Sie das Volumen des Prismas.

(5 Punkte)

Name: ____________________

b) Das Dreieck *DEF* liegt in der Ebene *L*.

(1) *Geben Sie eine Gleichung von L in Parameterform an.*

(2) *Berechnen Sie die Größe des Innenwinkels des Dreiecks DEF am Eckpunkt D.*

(3) *Begründen Sie, dass das Dreieck DEF parallel zur* x_1x_2 *-Ebene liegt.*

(2 + 2 + 1 Punkte)

Im Folgenden wird die Gerade *g* mit der Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R}$ betrachtet.

Des Weiteren wird der Punkt *F* durch einen Punkt $F_t(0\,|\,t\,|\,12-t)$ mit $0 < t \leq 8$ ersetzt. Für jeden Wert von *t* liegt der Punkt F_t auf der Gerade *g* (vgl. *Abbildung* 2).

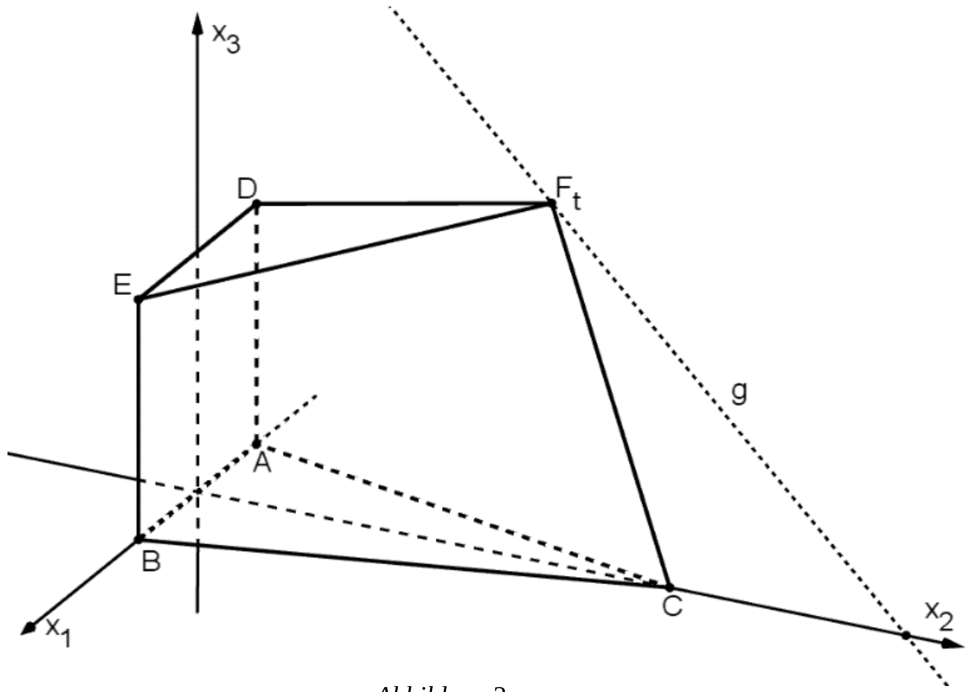


Abbildung 2

Mit *M* wird der Mittelpunkt der Basis $\overline{DE}$ des gleichschenkligen Dreiecks EF_tD bezeichnet.

Name: ____________________

c) *Zeigen Sie rechnerisch, dass für* $t = 4$ *die Strecke* $\overline{MF_t}$ *senkrecht auf der Gerade g steht.*

(2 Punkte)

d) *Begründen Sie ohne Rechnung, dass der Flächeninhalt des Dreiecks* EF_tD *für* $t = 4$ *am kleinsten ist.*

(3 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung

Name: ____________________

Abiturprüfung 2025

Mathematik, Grundkurs

Prüfungsteil B: Aufgaben mit Hilfsmitteln

Aufgabenstellung:

Unter den Touristen eines Naturparks nutzen erfahrungsgemäß 14 % das Fahrrad für Ausflüge vor Ort. Im Folgenden werden diese Touristen als Radausflügler bezeichnet. Es soll davon ausgegangen werden, dass in einer zufälligen Auswahl von Touristen des Naturparks die Anzahl der Radausflügler binomialverteilt ist.

a) Für eine Stichprobe werden 300 Touristen des Naturparks zufällig ausgewählt.

(1) *Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich in der Stichprobe genau* 36 *Radausflügler befinden.*

(2) *Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl der Radausflügler in der Stichprobe um mindestens* 10 % *größer ist als der Erwartungswert für diese Anzahl.*

(1 + 3 Punkte)

b) Um den Naturpark als Reiseziel attraktiver zu machen, setzt der dortige Tourismusverband Shuttlebusse ein. Die Fahrkarten für diese Busse können ausschließlich online gebucht werden und sind jeweils für einen bestimmten Tag gültig. Erfahrungsgemäß werden 80 % aller gebuchten Fahrkarten spätestens am Vortag der Fahrt gebucht. Von diesen spätestens am Vortag gebuchten Fahrkarten werden 90 % auch tatsächlich genutzt. Bei den restlichen, erst am Tag der Fahrt gebuchten Fahrkarten liegt dieser Anteil mit 95 % etwas höher.

(1) *Stellen Sie den Sachverhalt in einem beschrifteten Baumdiagramm dar.*

Name: ____________________

(2) Betrachtet wird eine zufällig ausgewählte, nicht genutzte Fahrkarte.

Beurteilen Sie die folgende Aussage:

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Fahrkarte spätestens am Vortag gebucht wurde, ist achtmal so groß wie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie erst am Tag der Fahrt gebucht wurde.

(3 + 3 Punkte)

c) Der Tourismusverband möchte überprüfen, ob sich der bisherige Anteil der Radausflügler unter den Touristen von 14 % durch den Einsatz der Shuttlebusse erhöht hat. Dazu werden für eine Stichprobe 200 Touristen des Naturparks zufällig ausgewählt.

Der Tourismusverband möchte von einer Erhöhung des bisherigen Anteils der Radausflügler unter den Touristen durch den Einsatz der Shuttlebusse ausgehen, wenn sich unter den Touristen der Stichprobe mindestens 35 Radausflügler befinden. Es wird vorher festgelegt, nur dann die Shuttlebusse weiterzubetreiben.

(1) *Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Shuttlebusse weiterbetrieben werden, wenn der Anteil der Radausflügler unter den Touristen unverändert geblieben ist.*

(2) Der Anteil der Radausflügler unter den Touristen ist tatsächlich auf 20 % gestiegen.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Shuttlebusse trotzdem nicht mehr weiterbetrieben werden.

(3 + 2 Punkte)

Zugelassene Hilfsmittel:

- CAS (Computer-Algebra-System)
- Mathematische Formelsammlung
- Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung