



Baden-Württemberg

MINISTERIUM FÜR KULTUS, JUGEND UND SPORT

Abiturprüfung an den allgemein bildenden Gymnasien

Haupttermin **2025**

Prüfungsfach: **Mathematik**

Bearbeitungszeit: **300 Minuten einschließlich Auswahlzeit**

Hilfsmittel:

- Nachschlagewerke zur deutschen Rechtschreibung
- das „Dokument mit mathematischen Formeln“ des IQB
- der im jeweiligen Kurs eingeführte **wissenschaftliche Taschenrechner (WTR)**

Hinweise:

Sie erhalten **vier** Aufgaben zur Bearbeitung:

1. die Aufgaben des Teils A (Aufgaben ohne Hilfsmittel)
2. eine Aufgabe Teil B Analysis (I 1 oder I 2)
3. eine Aufgabe Teil B Analytische Geometrie (II 1 oder II 2)
4. eine Aufgabe Teil B Stochastik (III 1 oder III 2)

Sie sind verpflichtet, die vorgelegten Aufgaben vor Bearbeitungsbeginn auf Vollständigkeit zu überprüfen (Anzahl der Blätter, Anlagen usw.).

Hinweis zu Teil A:

Bearbeiten Sie insgesamt **sechs** der zehn Aufgaben des Teils A ohne Hilfsmittel, und zwar:

- alle vier Pflichtaufgaben P1 bis P4
- zwei der sechs Wahlaufgaben W1 bis W6 nach eigener Wahl

Geben Sie **spätestens 110 Minuten nach Prüfungsbeginn** die Bearbeitung des Teils A ab.

Nach Abgabe der Bearbeitung des Teils A erhalten Sie **das Formel-dokument und den wissenschaftlichen Taschenrechner (WTR)** als Hilfsmittel für die Bearbeitung der drei Aufgaben des Teils B.

Sie werden gebeten, für jede Aufgabe einen neuen Bogen Papier zu verwenden.

Vermerken Sie auf jedem Bogen die Nummer der bearbeiteten Aufgabe.

Lösungen auf den Aufgabenblättern werden **nicht** gewertet; ausgenommen sind Eintragungen in Abbildungen, die auf entsprechend gekennzeichneten Anlagen vorzunehmen sind.

Pflichtaufgaben

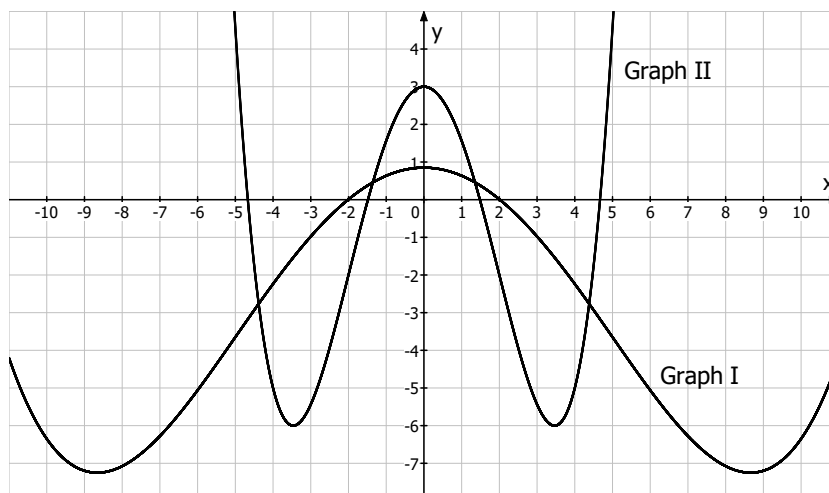
Bearbeiten Sie **alle** Aufgaben P1 bis P4.

P1

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x$.

a) Es gilt $f''(2) \neq 0$. Zeigen Sie, dass 2 eine Extremstelle von f ist. (2 BE)

b) Einer der abgebildeten Graphen I und II ist der Graph einer Stammfunktion von f .
Geben Sie diesen Graphen an und begründen Sie Ihre Angabe. (3 BE)



P2

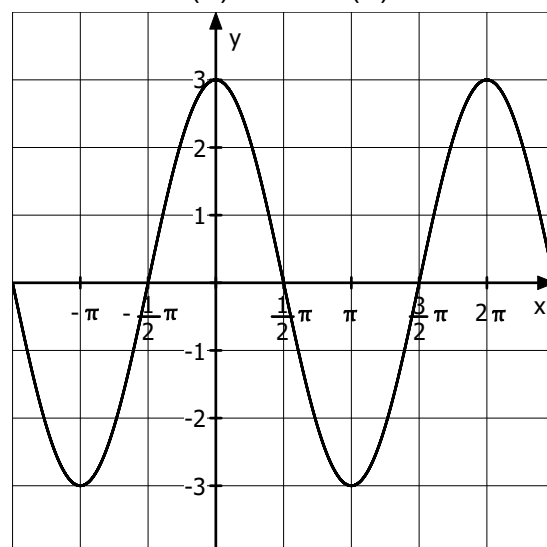
Die Abbildung zeigt den Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f mit $f(x) = 3 \cdot \cos(x)$.

a) Geben Sie den Wert des Integrals

$$\int_0^{\pi} f(x) dx \text{ an.}$$

(1 BE)

b) Die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion g ist gegeben durch $g(x) = a \cdot f(x) + b \cdot x$ mit reellen Zahlen a und b . Die Punkte $(0 | -3)$ und $(\frac{\pi}{2} | \frac{3}{4}\pi)$ liegen auf dem Graphen von g .
Ermitteln Sie a und b . (4 BE)



Prüfungsfach: Mathematik

Haupttermin 2025

Teil A

Blatt 2 von 5

P3

Die Abbildung in der Anlage zeigt einen Würfel ABCDEFGH der Kantenlänge 4 in einem Koordinatensystem. Drei Seitenflächen dieses Würfels liegen in Koordinatenebenen. Die Ebene K enthält die Punkte $A(0 | 0 | 0)$, $B(4 | 0 | 0)$ und den Mittelpunkt der Kante $\overline{FG}$.

- a) Die Ebene K teilt den Würfel in zwei Teilkörper. Berechnen Sie das Volumen des kleineren Teilkörpers. (2 BE)
- b) Eine zweite Ebene L enthält die Punkte E und F sowie den Mittelpunkt der Kante $\overline{BC}$. Zeichnen Sie die Schnittfigur dieser Ebene mit dem Würfel in die Abbildung in der Anlage ein und geben Sie eine Gleichung der Schnittgerade der Ebenen K und L an. (3 BE)

P4

Bei einem Spiel wird ein Würfel zweimal geworfen. Die Seiten des Würfels sind mit den Zahlen von 1 bis 6 durchnummeriert.

- a) Begründen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, bei keinem der beiden Würfe die Zahl 3 zu erzielen, $\frac{25}{36}$ beträgt. (2 BE)
- b) Der Einsatz bei diesem Spiel beträgt 2 Euro. Je nachdem, wie oft dabei die Zahl 3 erzielt wird, werden folgende Auszahlungen getätigt:

Anzahl der Würfe, bei denen die Zahl 3 erzielt wird	0	1	2
Auszahlung in Euro	0	5	x

Bei wiederholter Durchführung des Spiels ist zu erwarten, dass sich auf lange Sicht Einsätze und Auszahlungen ausgleichen. Ermitteln Sie den Wert von x. (3 BE)

Wahlaufgaben

Bearbeiten Sie zwei der Aufgaben W1 bis W6.

W1

Für jedes $a > 0$ ist eine in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f_a gegeben durch $f_a(x) = x \cdot e^{\frac{x}{a}}$.

Der Graph jeder Funktion f_a besitzt einen Extrempunkt E_a . Weisen Sie nach, dass es eine Ursprungsgerade gibt, auf der alle Punkte E_a liegen. (5 BE)

W2

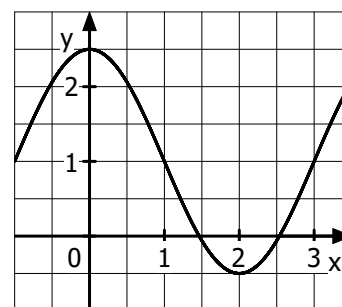
Abgebildet ist der Graph der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f mit $f(x) = a \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right) + b$; dabei sind a und b reelle Zahlen.

a) Geben Sie die Werte von a und b an. (2 BE)

b) Gegeben ist die Funktion J_0 durch

$$J_0(x) = \int_0^x f(t) \, dt \quad \text{mit } x \in]0; \infty[.$$

Begründen Sie ohne Rechnung, dass der Graph von J_0 keinen Schnittpunkt mit der x -Achse hat. (3 BE)



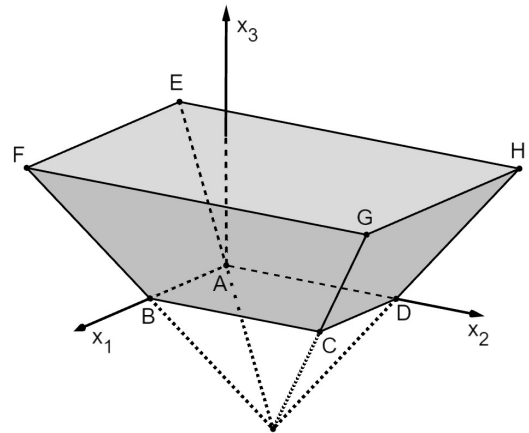
W3

Die Punkte $A(8 | 0 | 0)$, $B(0 | 6 | 0)$ und $C(4 | 3 | 10)$ sind die Eckpunkte eines gleichschenkligen Dreiecks mit Basis $\overline{AB}$. Das Dreieck ABC wird so um die Achse AB gedreht, dass der entstehende Punkt C^* in der x_1x_2 -Ebene liegt.

Bestimmen Sie die Koordinaten eines möglichen Punkts C^* . (5 BE)

W4

Der abgebildete Körper ABCDEFGH ist Teil einer geraden Pyramide mit rechteckiger Grundfläche EFGH. Die Rechtecke ABCD und EFGH liegen in zwei zueinander parallelen Ebenen mit dem Abstand 5. Der Flächeninhalt von EFGH ist viermal so groß wie der von ABCD. Es gilt:



$A(0|0|0)$, $B(4|0|0)$, $C(4|6|0)$ und $D(0|6|0)$

- Geben Sie eine Gleichung einer der beiden Symmetrieebenen des Körpers ABCDEFGH an. (1 BE)
- Begründen Sie, dass die Koordinaten des Punkts F mit folgendem Term ermittelt werden können:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + 2 \cdot \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \quad (4 \text{ BE})$$

W5

Betrachtet wird ein Würfel, dessen Seiten mit den Zahlen von 1 bis 6 durchnummeriert sind.

- Der Würfel wird zweimal geworfen. Die Zufallsgröße X gibt das Produkt der dabei erzielten Zahlen an. Begründen Sie, dass $P(X = 10) = P(X = 15)$ ist. (2 BE)
- Nun wird der Würfel n-mal geworfen, wobei n größer als 2 ist. Ermitteln Sie einen Term, mit dem man die Wahrscheinlichkeit für das folgende Ereignis berechnen kann: „Das Produkt der n erzielten Zahlen ist 2, 3 oder 5.“ (3 BE)

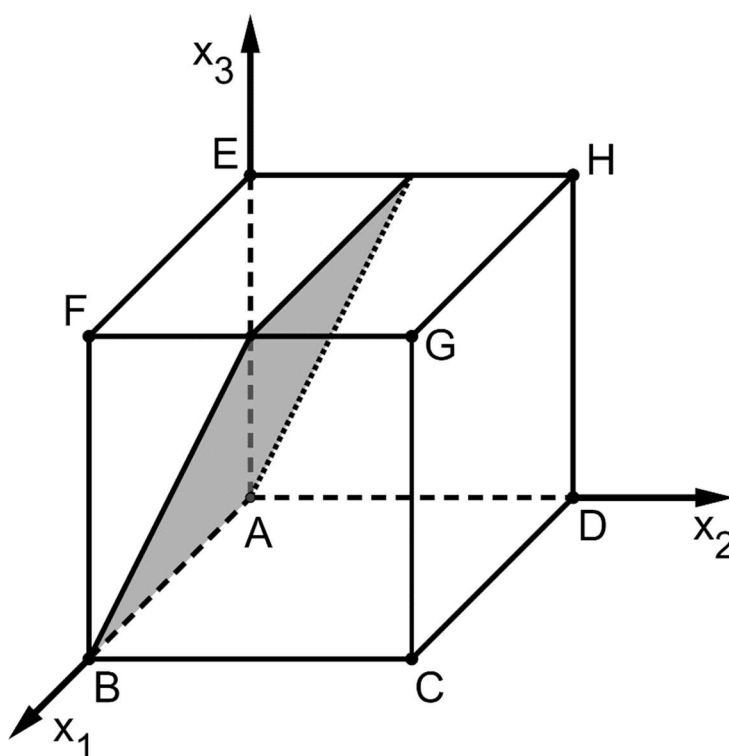
W6

Zu einem Zufallsexperiment werden zwei stochastisch unabhängige Ereignisse A und B betrachtet. Es gilt $P(B) = P(A) + 0,6$ sowie $P(A \cap \bar{B}) = 0,04$. Bestimmen Sie $P(A)$. (5 BE)



Teil A

zu Aufgabe P3



Aufgabe I 1.1

Betrachtet wird die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f_a mit $f_a(x) = \frac{1}{3}x^3 - ax + 2a$ mit $a \in \mathbb{R}$. Abbildung 1 zeigt einen Graphen der Schar.

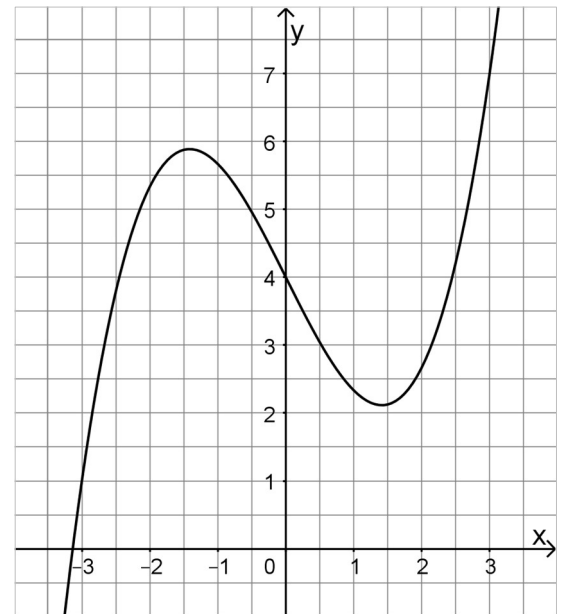


Abb. 1

- Der abgebildete Graph verläuft durch den Punkt $(0 | 4)$. Begründen Sie, dass es sich um den Graphen von f_2 handelt. (2 BE)
- Zeigen Sie rechnerisch, dass jeder Graph der Schar genau einen Wendepunkt besitzt, und geben Sie dessen Koordinaten an. (5 BE)
- Bestimmen Sie denjenigen Wert von a , für den $\int_0^2 f_a(x) dx = 0$ gilt. (4 BE)

Betrachtet wird im Folgenden die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x + 4$.

Die Funktion f entspricht der Funktion f_2 der Schar, Abbildung 1 zeigt somit den Graphen G_f von f . Dieser ist symmetrisch bezüglich des Punkts $(0 | 4)$.

Die Tangente an G_f im Punkt $P(3 | f(3))$ wird mit t bezeichnet; $y = 7x - 14$ ist eine Gleichung von t .

- Zeigen Sie rechnerisch anhand geeigneter Termumformungen, dass $f(x) - (7x - 14) = \frac{1}{3} \cdot (x - 3)^2 \cdot (x + 6)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Begründen Sie mithilfe dieses Zusammenhangs, dass t und G_f neben P genau einen weiteren gemeinsamen Punkt besitzen. (6 BE)
- Betrachtet wird die Gleichung $\int_k^{k+1} f(x) dx = 4$ mit $k \in \mathbb{R}$. Für $-1,5 \leq k \leq 1,5$ besitzt diese Gleichung genau eine Lösung. Untersuchen Sie mithilfe von Abbildung 1, wie viele Lösungen diese Gleichung für $k \geq 1,5$ besitzt. (4 BE)

Aufgabe I 1.2

Die Länge einer Fahrstrecke, die ein Elektroauto mit vollständig geladener Batterie ohne erneutes Aufladen unter bestimmten Bedingungen zurücklegen kann, wird als Nennreichweite des Elektroautos bezeichnet und ist für jedes Elektroauto ein fester Wert. Die tatsächliche Reichweite hängt von vielen Faktoren ab; im Folgenden wird ausschließlich die Abhängigkeit von der Außentemperatur betrachtet.

Diese Abhängigkeit kann für eine Vielzahl von Elektroautos modellhaft im Intervall $[-12; 36]$ durch eine Funktion r beschrieben werden. Dabei ist x die Außentemperatur in $^{\circ}\text{C}$ und $r(x)$ der Quotient aus der tatsächlichen Reichweite eines Elektroautos und dessen Nennreichweite. Abbildung 2 zeigt den Graphen der Funktion r .

Hat also r beispielsweise für eine bestimmte Außentemperatur den Wert $0,6$, so beträgt die tatsächliche Reichweite eines Elektroautos bei dieser Außentemperatur 60% seiner Nennreichweite.



Abb. 2

Im Folgenden werden nur Temperaturen im Bereich von -12°C bis 36°C sowie Elektroautos betrachtet, bei denen der durch die Funktion r beschriebene Zusammenhang gilt.

- Geben Sie anhand von Abbildung 2 die Koordinaten des Hochpunkts des Graphen von r an. Beschreiben Sie die Bedeutung des Hochpunkts und seiner Koordinaten im Sachzusammenhang. (4 BE)
- Die Nennreichweite eines Elektroautos A beträgt 320 km , die Nennreichweite eines Elektroautos B beträgt 500 km . Bestimmen Sie mithilfe von Abbildung 2 eine Außentemperatur, bei der das Elektroauto A dieselbe tatsächliche Reichweite besitzt wie das Elektroauto B bei einer Außentemperatur von 0°C . (5 BE)

Aufgabe I 2.1

In einem Tierpark soll ein Tier mit Hilfe einer Diät abnehmen. Die Masse dieses Tieres wird für $t \geq 0$ durch die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(t) = 36 \cdot e^{-0,05t} + 80$ beschrieben (t in Wochen nach Beginn der Diät, $f(t)$ in Kilogramm).

- Bestimmen Sie die Masse des Tieres sechs Wochen nach Beginn der Diät. (1 BE)
- Geben Sie die Masse an, die das Tier auf lange Sicht erreicht. (1 BE)
- Ermitteln Sie den Zeitpunkt, zu dem das Tier 25 % seiner Masse seit Beginn der Diät verloren hat. (4 BE)
- Bestimmen Sie die momentane Abnahme der Masse des Tieres zum Zeitpunkt $t_1 = 8$. (3 BE)
- Für alle $t \geq 0$ gilt $f'(t) < 0$ und $f''(t) > 0$. Geben Sie die Bedeutung dieser Aussage im Sachzusammenhang an. (2 BE)

Für die Funktion h gilt $h(f(t)) = t$ für $t \in \mathbb{R}$.

- Bestimmen Sie einen Term der Funktion h . (3 BE)
- Für zwei reelle Zahlen v und w gilt $h(v) = w$. Interpretieren Sie diese Gleichung im Sachzusammenhang. (2 BE)

Aufgabe I 2.2

Für jedes $a > 0$ ist eine Funktion g_a gegeben durch $g_a(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{a \cdot x}$ mit maximalem Definitionsbereich. G_a ist der Graph von g_a .

- Geben Sie eine Gleichung der senkrechten Asymptote von G_a an. (1 BE)
- Zeigen Sie, dass für alle $a > 0$ gilt: $\int_1^e g_a(x) dx < 1 - \frac{1}{e}$ (4 BE)

Jeder Graph G_a besitzt genau einen Punkt P_a mit waagerechter Tangente.

- Weisen Sie nach, dass P_a die x-Koordinate $2a$ besitzt. (3 BE)
- Für jeden Wert von a gilt:
 - N_a ist der Schnittpunkt von G_a mit der x-Achse.
 - Der Kreis K_a hat den Mittelpunkt P_a und verläuft durch N_a .

Bestimmen Sie denjenigen Wert von a , für den K_a die y-Achse berührt. (6 BE)

Die Abbildung in der Anlage zeigt die Pyramide ABCDS. Ihre Grundfläche ABCD ist ein Drachenviereck mit den Eckpunkten $A(0|0|0)$, $B(2|2|0)$, $C(0|6|0)$ und $D(-2|2|0)$. Die Spitze der Pyramide liegt im Punkt $S(0|0|6)$.

- a) Berechnen Sie die Länge der kürzesten der acht Kanten sowie das Volumen der Pyramide ABCDS. (4 BE)

Die Seitenfläche BCS der Pyramide liegt in der Ebene E.

- b) Betrachtet werden die Vektoren $\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$, deren Koordinaten nicht alle gleich null

sind. Begründen Sie, dass ein solcher Vektor, für den $\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ und

$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$ gilt, ein Normalenvektor von E ist. (3 BE)

- c) Die Ebene E hat die Gleichung $2x_1 + x_2 + x_3 = 6$. Bestimmen Sie die Größe des Winkels, den E mit der x_1x_2 -Ebene einschließt. (3 BE)

Gegeben ist die Schar der Ebenen $F_k : k \cdot x_2 + (k - 2) \cdot x_3 = 2k$ mit $k \in]0;3[$.

Jede Ebene F_k der Schar schneidet die Pyramide ABCDS in einem Dreieck BDQ_k , wobei der Punkt Q_k auf der Strecke $\overline{SC}$ liegt.

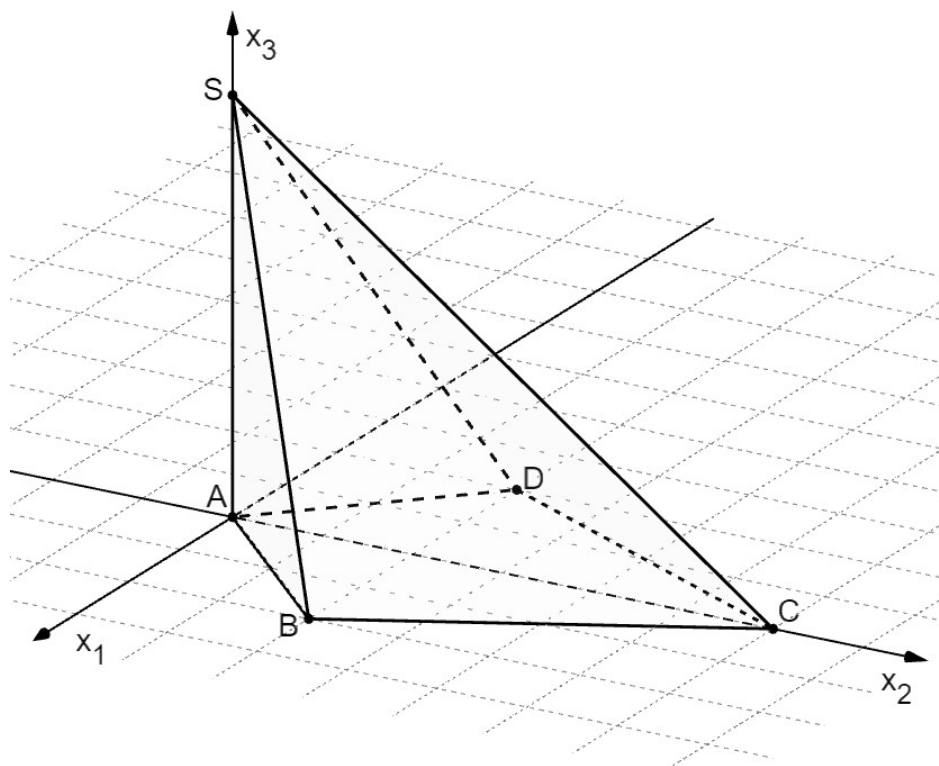
- d) Geben Sie eine Gleichung der Ebene F_2 an und zeichnen Sie in die Abbildung in der Anlage die Schnittfigur von F_2 mit der Pyramide ABCDS ein. (4 BE)

- e) Es gibt einen Wert von k, für den der Flächeninhalt des Dreiecks BDQ_k minimal ist. Ermitteln Sie diesen Wert. (6 BE)



Teil B: Analytische Geometrie

zu Aufgabe II 1

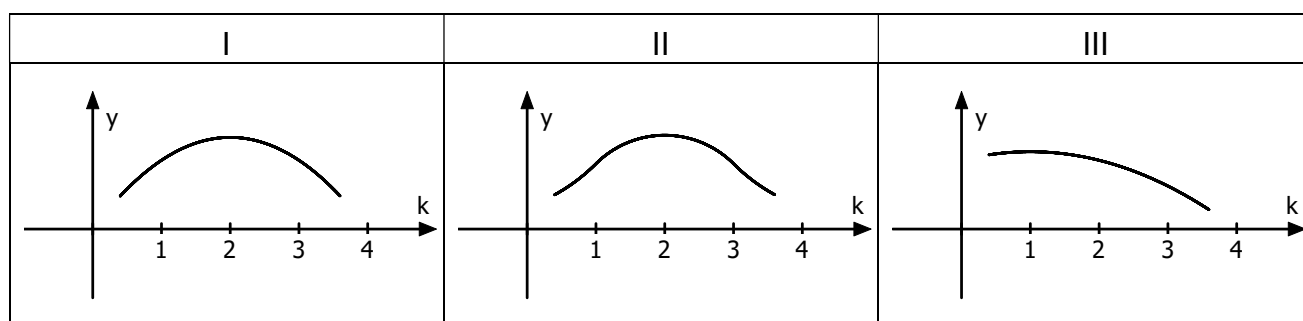


Gegeben ist die Ebene $F: x_1 - 3x_2 - x_3 = -6$.

- a) Stellen Sie F in einem Koordinatensystem dar. (2 BE)
- b) Berechnen Sie die Größe des Winkels, den F mit der Ebene $G: -2x_1 + 6x_2 = 8$ einschließt. (3 BE)

Betrachtet wird die Schar der Ebenen $E_k: 2x_1 - 6x_2 + (4 - k) \cdot x_3 = -2k$ mit $k \in \mathbb{R}$.

- c) Die Ebene F gehört zu dieser Schar. Geben Sie den zugehörigen Wert von k an. (1 BE)
- d) Für einen Wert von k ist E_k orthogonal zu F . Ermitteln Sie diesen Wert von k . (3 BE)
- e) Für jedes k mit $0,4 < k < 3,6$ sind die Spurpunkte von E_k auf der x_1 - und der x_2 -Achse und der Punkt $(0 | \frac{4}{3} | 0)$ die Eckpunkte eines Dreiecks D_k . Einer der drei abgebildeten Graphen stellt den Flächeninhalt von D_k in Abhängigkeit von k dar. Entscheiden Sie, welcher Graph das ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung. (4 BE)



- f) Es gibt eine Gerade h , die in allen Ebenen der Schar liegt. Ermitteln Sie eine Gleichung von h . (4 BE)
- (zur Kontrolle: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$)
- g) Begründen Sie, dass h parallel zur x_1x_2 -Ebene verläuft. (1 BE)
- h) Die Ebene J enthält die Gerade h , sie ist jedoch keine Ebene der Schar. Geben Sie eine Gleichung von J an. (2 BE)

Unter den Touristen eines Naturparks nutzen erfahrungsgemäß 14 % das Fahrrad für Ausflüge vor Ort. Im Folgenden werden diese Touristen als Radausflügler bezeichnet. Es soll davon ausgegangen werden, dass in einer zufälligen Auswahl von Touristen des Naturparks die Anzahl der Radausflügler binomialverteilt ist.

Für eine Stichprobe werden 300 Touristen des Naturparks zufällig ausgewählt.

- a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich in der Stichprobe genau 36 Radausflügler befinden. (1 BE)
- b) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl der Radausflügler in der Stichprobe um mindestens 10 % größer ist als der Erwartungswert für diese Anzahl. (3 BE)

Um den Naturpark als Reiseziel attraktiver zu machen, setzt der dortige Tourismusverband Shuttlebusse ein. Die Fahrkarten für diese Busse können ausschließlich online gebucht werden und sind jeweils für einen bestimmten Tag gültig. Erfahrungsgemäß werden 80 % aller gebuchten Fahrkarten spätestens am Vortag der Fahrt gebucht. Von diesen spätestens am Vortag gebuchten Fahrkarten werden 90 % auch tatsächlich genutzt. Bei den restlichen, erst am Tag der Fahrt gebuchten Fahrkarten liegt dieser Anteil mit 95 % etwas höher.

- c) Stellen Sie den Sachverhalt in einem beschrifteten Baumdiagramm dar. (3 BE)
- d) Betrachtet wird eine zufällig ausgewählte, nicht genutzte Fahrkarte. Beurteilen Sie die folgende Aussage: (3 BE)

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Fahrkarte spätestens am Vortag gebucht wurde, ist achtmal so groß wie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie erst am Tag der Fahrt gebucht wurde.

Der Tourismusverband vermutet, dass sich der bisherige Anteil der Radausflügler unter den Touristen von 14 % durch den Einsatz der Shuttlebusse erhöht hat. Die Verantwortlichen planen die Durchführung eines Signifikanztests mit einem Signifikanzniveau von 8 % und der Nullhypothese „Der Anteil der Radausflügler unter allen Touristen liegt bei höchstens 14 %.“ Vor der Durchführung des Tests wird festgelegt, die Shuttlebusse nur dann weiter zu betreiben, wenn die Nullhypothese aufgrund des Testergebnisses abgelehnt wird.

- e) Es ist geplant, den Test auf der Grundlage einer Stichprobe von 500 Touristen durchzuführen. Bestimmen Sie die zugehörige Entscheidungsregel. (5 BE)

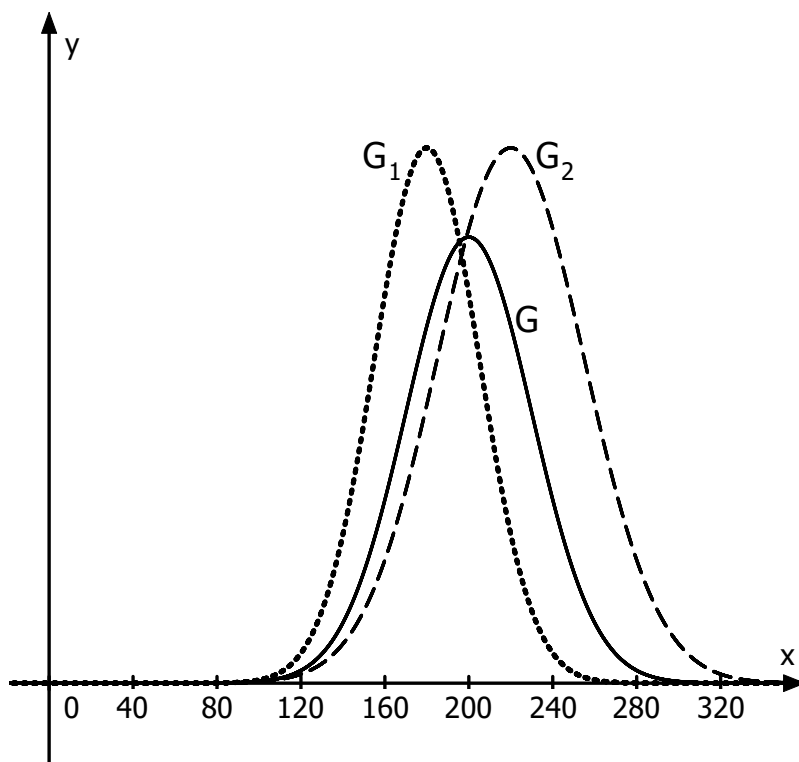
- f) Angenommen, der beschriebene Test wird auf der Grundlage einer Stichprobe von nur 200 Touristen durchgeführt. In diesem Fall wird die Nullhypothese abgelehnt, wenn sich unter diesen mehr als 35 Radausflügler befinden. Damit die Wahrscheinlichkeit für den Fehler zweiter Art höchstens 15 % beträgt, muss der tatsächliche Anteil der Radausflügler unter allen Touristen mindestens einen bestimmten Wert haben. Ermitteln Sie diesen Wert auf ganze Prozent genau und beschreiben Sie die Bedeutung des Fehlers zweiter Art im Sachzusammenhang. (5 BE)

Die Zufallsgröße Z gibt die Fahrzeit eines Linienbusses zwischen zwei bestimmten Haltestellen an. Sie kann näherungsweise als normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 200$ und der Standardabweichung $\sigma = 30$ angenommen werden (alle Werte in Sekunden).

- a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einer zufällig ausgewählten Fahrt die Fahrzeit zwischen den beiden Haltestellen weniger als 150 Sekunden beträgt. (1 BE)
- b) Ermitteln Sie das kleinste Intervall, in dem die Fahrzeit einer zufällig ausgewählten Fahrt mit einer Wahrscheinlichkeit von 60 % liegt. (4 BE)
- c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von zehn zufällig ausgewählten Fahrten die Fahrzeit bei genau zwei Fahrten mehr als 220 Sekunden beträgt. (3 BE)

An Markttagen ist die Fahrzeit zwischen den beiden Haltestellen durchschnittlich etwas länger als an den übrigen Tagen. Diese Fahrzeit kann durch die normalverteilte Zufallsgröße Z^* beschrieben werden.

- d) In der Abbildung ist G der Graph der Dichtefunktion von Z . Untersuchen Sie, ob einer der Graphen G_1 und G_2 der Graph der Dichtefunktion von Z^* sein könnte. (2 BE)



Eine Fahrt mit einer Fahrzeit von mehr als 240 Sekunden zwischen den beiden Haltestellen gilt als verspätet. Dies ist bei 9 % aller Fahrten der Fall. 20 % aller Fahrten finden an Markttagen statt. Ein Viertel der Fahrten an Markttagen ist verspätet.

Zu einer zufällig ausgewählten Fahrt werden folgende Ereignisse betrachtet:

V: „Die Fahrt ist verspätet.“

M: „Die Fahrt findet an einem Markttag statt.“

- e) Stellen Sie den Sachverhalt in einer vollständig ausgefüllten Vierfeldertafel dar. (4 BE)
- f) Von den Fahrten ohne Verspätung wird eine Fahrt zufällig ausgewählt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese an einem Tag ohne Markt stattfindet. (2 BE)
- g) Eine städtische Mitarbeiterin hält 240 Sekunden als Grenze, ab der eine Fahrt als verspätet gilt, für zu streng. Deshalb schlägt sie vor, eine neue Grenze so festzulegen, dass nur noch 15 % der Fahrten an einem Markttag als verspätet gelten. Mit dieser neuen Grenze finden 51 % der verspäteten Fahrten an einem Markttag statt. Bestimmen Sie diese neue Grenze. (4 BE)

Für die Fachlehrerin / den Fachlehrer

Es gelten die Vorgaben zum Erwartungshorizont in den Beurteilungs- und Korrekturrichtlinien für die Abiturprüfung an den allgemein bildenden Gymnasien in der aktuell gültigen Fassung.

Pflichtaufgaben

P1

a) $f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3; f'(2) = 0$

b) Graph II

Der Graph jeder Stammfunktion F von f hat im Punkt $(2 | F(2))$ einen Wendepunkt.

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
P1 a	2	I				I		2		
b	3	II	II		II				3	

P2

a) $\int_0^{\pi} f(x) dx = 0$

b) $3a \cdot \cos(0) + b \cdot 0 = -3 \Leftrightarrow a = -1$

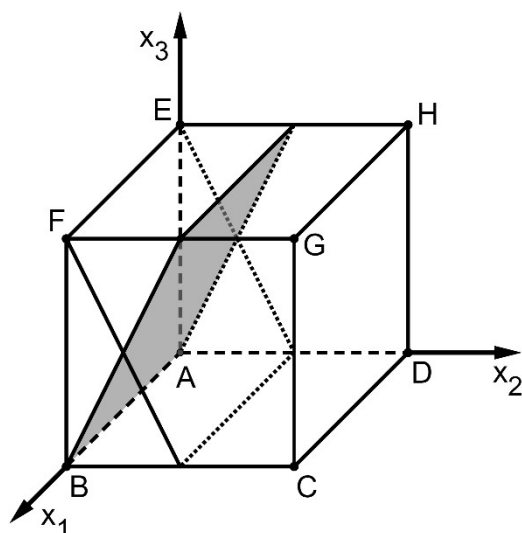
$3a \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + b \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3}{4}\pi \Leftrightarrow b = \frac{3}{2}$

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
P2 a	1	I			II				1	
b	4	I	I			II		2	2	

P3

a) Volumen: $\frac{1}{4} \cdot 4^3 = 16$

b)



Schnittgerade: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
P3 a	2		I		I	I		2		
b	3		II		II				3	

P4

a) Die Wahrscheinlichkeit dafür, bei einmaligem Werfen des Würfels nicht die Zahl 3 zu erzielen, beträgt $\frac{5}{6}$;

$$\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{36}$$

b) $\frac{1}{36} \cdot x + \frac{10}{36} \cdot 5 = 2 \Leftrightarrow x = 22$

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
P4 a	2	I		I		I		2		
b	3		II	II		II			3	

Wahlaufgaben

W1

$$f_a'(x) = e^{\frac{x}{a}} + x \cdot \frac{1}{a} \cdot e^{\frac{x}{a}} = \left(1 + \frac{x}{a}\right) \cdot e^{\frac{x}{a}}; \quad f_a'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -a; \quad f_a(-a) = -a \cdot \frac{1}{e} \quad \text{und damit } E_a\left(-a \mid -a \cdot \frac{1}{e}\right).$$

Weil $\frac{f_a(-a) - 0}{-a - 0} = \frac{-a \cdot \frac{1}{e}}{-a} = \frac{1}{e}$ nicht von a abhängt, liegen alle Punkte E_a auf einer Ursprungsgerade.

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
W1	5	III	III			II			2	3

W2

a) $a = 1,5; b = 1$

b) $J_0(x)$ gibt den orientierten Flächeninhalt zwischen dem Graphen von f und der x -Achse im Bereich von 0 bis x an. Die Abbildung zeigt, dass die Inhalte der einzelnen Teilflächen, die der Graph der periodischen Funktion f mit der x -Achse oberhalb der x -Achse einschließt, größer sind als die Inhalte der einzelnen Teilflächen unterhalb der x -Achse.

Zwischen der y -Achse und der ersten positiven Nullstelle von f ist der Inhalt der zugehörigen Teilfläche größer als zwischen den ersten beiden positiven Nullstellen von f .

Deshalb besitzt der Graph von J_0 im Intervall $]0; \infty[$ keinen Schnittpunkt mit der x -Achse.

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
W2 a	2		II		II	I		1	1	
b	3	III			II		III			3

W3

Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$: $M(4 | 3 | 0)$, Höhe des Dreiecks: $|\overrightarrow{MC}| = 10$

$\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist orthogonal zu $\overrightarrow{AB}$, parallel zur x_1x_2 -Ebene und hat den Betrag 5.

$\overrightarrow{OC^*} = \overrightarrow{OM} + 2 \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix}$, somit $C^*(10 | 11 | 0)$

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
W3	5	II	III			II			2	3

W4

a) $x_1 = 2$

b) Mittelpunkt des Rechtecks ABCD: $M(2 | 3 | 0)$

Mittelpunkt des Rechtecks EFGH: $M^*(2 | 3 | 5)$

Da das Rechteck EFGH zum Rechteck ABCD ähnlich ist und den vierfachen Flächeninhalt besitzt, haben die Diagonalen des Rechtecks EFGH die doppelte Länge wie die Diagonalen des Rechtecks ABCD.

Folglich gilt $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AM^*} + 2 \cdot \overrightarrow{MB}$.

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
W4 a	1				I	I		1		
b	4	III	III		II	II	III		1	3

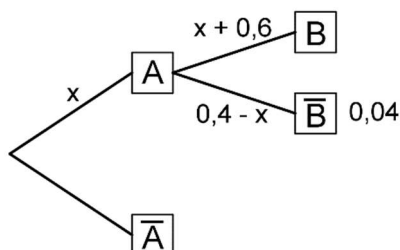
W5

- a) Bis auf Vertauschung der Faktoren sind $2 \cdot 5$ und $3 \cdot 5$ die einzigen Möglichkeiten, 10 bzw. 15 als Produkt aus zwei erzielten Zahlen darzustellen. Somit sind die betrachteten Wahrscheinlichkeiten gleich groß.
- b) Das Produkt ist genau dann gleich 2, 3 oder 5, wenn eine der n erzielten Zahlen 2, 3 bzw. 5 ist und sonst nur Einsen erzielt werden. Ein Term für die beschriebene Wahrscheinlichkeit ist also $3 \cdot n \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$.

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
W5 a	2	II	I		I		I	1	1	
b	3	III	III	II		II	III			3

W6

Mit $x = P(A)$ gilt:



$$x \cdot (0,4 - x) = 0,04 \Leftrightarrow x^2 - 0,4x + 0,04 = 0 \Leftrightarrow x = 0,2$$

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
W6	5	III	III		II	II			2	3

Aufgabe I 1.1

a) $f_a(0) = 4 \Leftrightarrow 2a = 4 \Leftrightarrow a = 2$

b) $f_a'(x) = x^2 - a$; $f_a''(x) = 2x$; $f_a'''(x) = 2$

Wegen $f_a''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ und $f_a'''(0) = 2 \neq 0$ besitzt der Graph von f_a mit $(0 | 2a)$ genau einen Wendepunkt.

c) $\int_0^2 f_a(x) dx = \left[\frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{2}ax^2 + 2ax \right]_0^2 = \frac{4}{3} + 2a$

$$\int_0^2 f_a(x) dx = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{2}{3}$$

d) $f(x) - (7x - 14) = \frac{1}{3}x^3 - 2x + 4 - (7x - 14) = \frac{1}{3}x^3 - 9x + 18$;

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \cdot (x-3)^2 \cdot (x+6) &= \frac{1}{3} \cdot (x^2 - 6x + 9) \cdot (x+6) = \frac{1}{3} \cdot (x^3 - 6x^2 + 9x + 6x^2 - 36x + 54) \\ &= \frac{1}{3}x^3 - 9x + 18 \end{aligned}$$

Begründung:

$$f(x) = 7x - 14 \Leftrightarrow f(x) - (7x - 14) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \cdot (x-3)^2 \cdot (x+6) = 0 \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -6$$

e) Der Wert des Integrals $\int_k^{k+1} f(x) dx$ entspricht für $k \geq 1,5$ dem Inhalt des Flächenstücks

zwischen G_f und der x-Achse im Bereich $k \leq x \leq k+1$; dieses erstreckt sich also jeweils auf einen Streifen der Breite 1. In Verbindung mit Abbildung 1 ergibt sich: Mit wachsendem Wert von k , beginnend bei $k = 1,5$, wird der Wert des Integrals, der für $k = 1,5$ kleiner als 4 ist, kontinuierlich größer. Da er für $k = 2,5$ bereits größer als 4 ist, gibt es im Bereich $k \geq 1,5$ genau eine Lösung der Gleichung.

Aufgabe I 1.2

a) $(22 | 1,2)$

Die größte tatsächliche Reichweite liegt bei einer Außentemperatur von 22°C vor.
Diese beträgt das 1,2-Fache der Nennreichweite.

b) $r(x) \cdot 320 \text{ km} = r(0) \cdot 500 \text{ km} \Rightarrow r(x) = r(0) \cdot \frac{500 \text{ km}}{320 \text{ km}} \approx 0,7 \cdot \frac{500 \text{ km}}{320 \text{ km}} \approx 1,1$

$$r(14) \approx 1,1$$

Mögliche Außentemperatur: etwa 14°C

Für die Fachlehrerin / den Fachlehrer

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a	2	I				I		X		
b	5	I	I			I		X		
c	4	I				II			X	
d	6	II	II			II			X	
e	4	III	II		III		II			X
2 a	4			II	I		II		X	
b	5		III	II	II		II			X

Aufgabe I 2.1

a) $f(6) \approx 106,7$

Die Masse des Tieres beträgt sechs Wochen nach Beginn der Diät etwa 107 kg.

b) 80 kg

c) $f(t) = 0,75 \cdot f(0) \Leftrightarrow 36 \cdot e^{-0,05t} + 80 = 0,75 \cdot 116 \Leftrightarrow -0,05t = \ln\left(\frac{7}{36}\right) \Leftrightarrow t = -20 \cdot \ln\left(\frac{7}{36}\right) \approx 32,8$

Etwa 33 Wochen nach Beginn der Diät hat das Tier 25 % seiner Masse verloren.

d) $f'(t) = -1,8 \cdot e^{-0,05t}$, $f'(8) \approx -1,2$

Die momentane Abnahme der Masse beträgt etwa 1,2 kg pro Woche.

e) Das Tier verliert ständig Masse, nimmt dabei aber immer langsamer ab.

f) $y = 36 \cdot e^{-0,05t} + 80 \Leftrightarrow \frac{y-80}{36} = e^{-0,05t} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{y-80}{36}\right) = -0,05t \Leftrightarrow t = -20 \cdot \ln\left(\frac{y-80}{36}\right)$,
somit $h(x) = -20 \cdot \ln\left(\frac{x-80}{36}\right)$

g) Die Masse des Tieres beträgt w Wochen nach Beginn der Diät v kg.

Aufgabe I 2.2

a) $x = 0$

b) $\int_1^e g_a(x) dx = \left[-\frac{1}{x} - \frac{1}{a} \cdot \ln(x) \right]_1^e = -\frac{1}{e} - \frac{1}{a} - (-1 - 0) = 1 - \frac{1}{e} - \frac{1}{a} < 1 - \frac{1}{e}$
 $\underbrace{\quad}_{<0}$

c) $g_a'(x) = -\frac{2}{x^3} + \frac{1}{a \cdot x^2}$, $g_a'(2a) = -\frac{2}{8a^3} + \frac{1}{a \cdot 4a^2} = 0$, somit ist $2a$ die x-Koordinate von P_a .

d) $g_a(x) = 0 \Leftrightarrow x = a$, somit $N_a(a | 0)$; $g_a(2a) = -\frac{1}{4a^2}$, somit $P_a\left(2a \mid -\frac{1}{4a^2}\right)$.

Der Radius des Kreises ist $r_a = d(N_a; P_a) = \sqrt{a^2 + \frac{1}{16a^4}}$.

Damit der Kreis die y-Achse berührt, muss $r_a = 2a$ gelten. Wegen $a > 0$ gilt:

$$\sqrt{a^2 + \frac{1}{16a^4}} = 2a \Leftrightarrow a^2 + \frac{1}{16a^4} = 4a^2 \Leftrightarrow 48a^6 = 1 \Leftrightarrow a = \sqrt[6]{\frac{1}{48}}$$

Für die Fachlehrerin / den Fachlehrer

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a	1		I	I		I		X		
b	1	I	I	I				X		
c	4		II	II		II			X	
d	3		I	I		I		X		
e	2			II	II		II		X	
f	3		I		II	II			X	
g	2			III	II		III			X
2 a	1				I	I		X		
b	4	I	II		II	II			X	
c	3		II			II			X	
d	6	II	III			III	III			X

Für die Fachlehrerin / den Fachlehrer

a) kleinste Kantenlänge: $|\overline{AB}| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = 2\sqrt{2}$

Inhalt der Grundfläche der Pyramide: $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = 12$

Volumen der Pyramide: $\frac{1}{3} \cdot 12 \cdot 6 = 24$

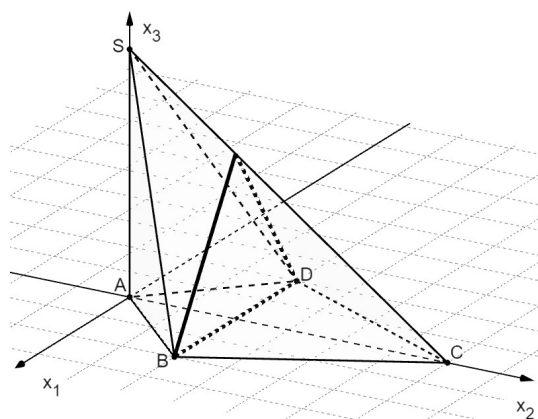
b) $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist kollinear zu $\overrightarrow{BC}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ist kollinear zu $\overrightarrow{BS}$.

Da die Vektoren $\overrightarrow{BC}$ und $\overrightarrow{BS}$ die Ebene E aufspannen und $\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ zu diesen Vektoren

senkrecht steht, ist $\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ ein Normalenvektor von E.

c) $\cos \alpha = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|} = \frac{1}{\sqrt{6}}$ liefert $\alpha \approx 65,9^\circ$.

d) Gleichung von F_2 : $x_2 = 2$



e) Der Flächeninhalt des Dreiecks BDQ_k ist minimal, wenn $|\overline{MQ_k}|$ am kleinsten ist, wobei M den Mittelpunkt von $\overline{BD}$ bezeichnet. Die zugehörige Ebene F_k steht in diesem Fall senkrecht zur Kante $\overline{SC}$.

Für die Fachlehrerin / den Fachlehrer

Für diesen Wert von k gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\begin{pmatrix} 0 \\ k \\ k-2 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ k \\ k-2 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix} \Rightarrow k = 6\lambda \wedge k-2 = -6\lambda \Rightarrow k-2 = -k \Rightarrow k = 1$$

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	4		I		I	I		X		
b	3	II	II		I		II		X	
c	3		I		I	II			X	
d	4	II			II	I			X	
e	6	III	III		II	II	III			X

a) siehe Abbildung rechts

$$b) \cos \alpha = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \right|} = \frac{20}{\sqrt{11} \cdot \sqrt{40}} \text{ liefert } \alpha \approx 17,5^\circ.$$

c) $k = 6$

$$d) \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 4-k \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2 + 18 - 4 + k = 0 \Leftrightarrow k = -16$$

e) $S_1(-k|0|0)$, $S_2(0|\frac{1}{3}k|0)$, $P(0|\frac{4}{3}|0)$

Für den Flächeninhalt $A(k)$ von D_k gilt:

$$A(k) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{3}k \right) \cdot k = \frac{1}{6} \cdot k \cdot (4 - k)$$

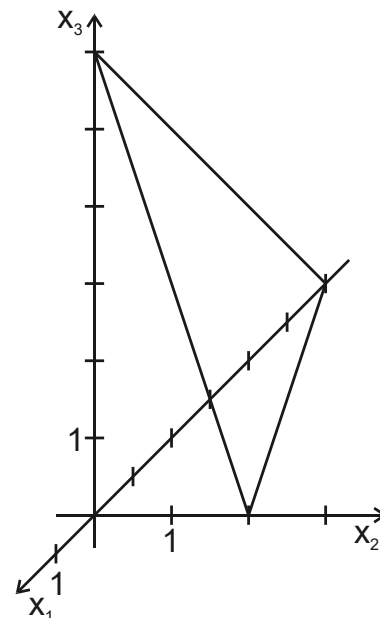
Der Graph von A ist eine Parabel, die symmetrisch zur Gerade mit der Gleichung $k = 2$ ist. Daher stellt Graph I den Flächeninhalt von D_k dar.

f) Schnitt von E_0 mit E_4 führt auf das LGS $\begin{pmatrix} 2 & -6 & 4 & 0 \\ 2 & -6 & 0 & -8 \end{pmatrix}$. Mit $x_2 = r$ ergibt sich $x_1 = 3r - 4$

$$\text{und } x_3 = 2. \text{ Gleichung von } h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

g) Der Richtungsvektor von h hat die x_3 -Koordinate 0, also verläuft h parallel zur x_1x_2 -Ebene.

h) $x_3 = 2$



Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	2				I	I		X		
b	3					II			X	
c	1		I		I	I		X		
d	3		II		II	I			X	
e	4	III	III		III	II	II			X
f	4		II			II			X	
g	1	I					I	X		
h	2		III		II					X

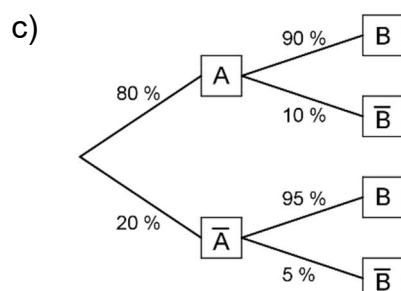
Für die Fachlehrerin / den Fachlehrer

a) X: Anzahl der Radausflügler

$$P_{0,14}^{300}(X = 36) \approx 4 \%$$

b) $\mu = 300 \cdot 0,14 = 42$

$$P_{0,14}^{300}(X \geq 47) \approx 22 \%$$



A: „Die Fahrkarte wird spätestens am Vortag gebucht.“

B: „Die Fahrkarte wird genutzt.“

$$d) P_{\bar{B}}(A) = \frac{0,8 \cdot 0,1}{P(\bar{B})} = \frac{0,08}{P(\bar{B})}, P_{\bar{B}}(\bar{A}) = \frac{0,2 \cdot 0,05}{P(\bar{B})} = \frac{0,01}{P(\bar{B})}$$

Die Aussage ist richtig.

e) Y: Anzahl der Radausflügler

$$P_{0,14}^{500}(Y \geq 81) \approx 9,0 \%, P_{0,14}^{500}(Y \geq 82) \approx 7,1 \%$$

Befinden sich mindestens 82 Radausflügler in der Stichprobe, so wird die Nullhypothese abgelehnt.

f) $P_{0,20}^{200}(Y \leq 35) \approx 22 \%, P_{0,21}^{200}(Y \leq 35) \approx 13 \%$

Der tatsächliche Anteil der Radausflügler müsste mindestens 21 % betragen.

Obwohl der Anteil der Radausflügler auf über 14 % gestiegen ist, entscheidet man sich aufgrund des Testergebnisses dafür, den Betrieb der Shuttlebusse einzustellen.

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	1			I			I	X		
b	3		II	II		I			X	
c	3		I		I		I	X		
d	3	II	II	II		II			X	
e	5	II	II			II	II		X	
f	5	II	III	III		II	II			X

Für die Fachlehrerin / den Fachlehrer

- a) $P(Z < 150) \approx 5 \%$
- b) Das gesuchte Intervall $[a; b]$ muss symmetrisch um μ liegen. Die Bedingung $P(Z \leq a) = 0,20$ führt auf $a \approx 174,8$. Also ist das gesuchte Intervall $[174,8; 225,2]$.
- c) $p = P(Z > 220) \approx 0,25$; X : Anzahl der Fahrten mit einer Fahrzeit von mehr als 220 Sekunden
 $P_p^{10}(X = 2) \approx 28 \%$
- d) Der Graph G_1 kann nicht Graph der Dichtefunktion von Z^* sein, weil er gegenüber G nach links verschoben ist. Der Graph G_2 kann nicht Graph der Dichtefunktion von Z^* sein, weil der Inhalt der Fläche zwischen G_2 und der x-Achse deutlich größer ist als der Inhalt der Fläche zwischen G und der x-Achse.

e)

	V	$\bar{V}$	
M	0,05	0,15	0,2
$\bar{M}$	0,04	0,76	0,8
	0,09	0,91	1

f) $P_{\bar{V}}(\bar{M}) = \frac{P(\bar{V} \cap \bar{M})}{P(\bar{V})} \approx 83,5 \%$

- g) Mit den neuen Prozentwerten würde gelten:

$$P(V \cap M) = 0,15 \cdot 0,2 = 0,03, \text{ somit } P(V) = \frac{P(V \cap M)}{0,51} = \frac{1}{17}; P(Z \geq t) = \frac{1}{17} \text{ führt auf } t \approx 247.$$

Die neue Grenze würde unter den gegebenen Bedingungen bei ca. 247 s liegen.

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	1					I		X		
b	4	II	II			I			X	
c	3		II	II		II			X	
d	2	III	II	II	III		II			X
e	4				I		I	X		
f	2		II	II		I			X	
g	4		III	III		II	III			X