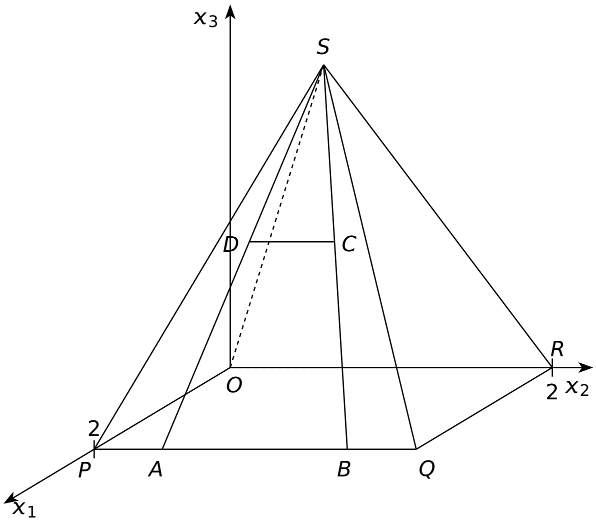
Aufgabe II 1

a) **Berechnung des stumpfen Winkels zwischen zwei Seitenflächen** (6VP)

Um die Aufgabe zu bearbeiten, muss die gegebene Pyramide zunächst in ein geeignete Koordinatensystem eingebettet werden. Beispielsweise kann dazu die hintere linke Ecke der Pyramide in den Koordinatenursprung O gelegt werden.



Wegen der Seitenlänge und der Höhe der Pyramide von jeweils 2,0 m ergeben sich damit folgende Koordinaten der Eckpunkte:
$O(0 \mid 0 \mid 0)$, $P(2 \mid 0 \mid 0)$, $Q(2 \mid 2 \mid 0)$, $R(0 \mid 2 \mid 0)$ und $S(1 \mid 1 \mid 2)$.

Der gesuchte stumpfe Winkel kann z.B. zwischen den beiden Seitenflächen OPS und PQS berechnet werden. Dazu wird jeweils ein **Normalenvektor** von jeder der beiden Seitenflächen benötigt.

Die Seitenfläche OPS wird von den Vektoren $\overrightarrow{OP}$ und $\overrightarrow{OS}$ aufgespannt. Ein Normalenvektor $\vec{n}_1$ dieser Fläche ergibt sich damit zu:

$$\vec{n}_1 = \overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 2 - 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot 1 - 0 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \widehat{=} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Im letzten Schritt wurde innerhalb des Normalenvektors mit 2 gekürzt, was zulässig ist, da der Normalenvektor ein Richtungsvektor ist.

Die zweite Seitenfläche PQS wird von den Vektoren $\overrightarrow{PQ}$ und $\overrightarrow{PS}$ aufgespannt. Für ihren Normalenvektor $\vec{n}_2$ ergibt sich:

$$\vec{n}_2 = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PS} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 - 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot (-1) - 0 \cdot 2 \\ 0 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \widehat{=} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Für den Schnittwinkel β dieser beiden Vektoren gilt:

$$\cos\beta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{1}{5} \quad \Rightarrow \quad \beta \approx 78,5.$$

Der gesuchte Winkel α zwischen zwei Seitenflächen ist laut Aufgabentext ein **stumpfer Winkel**. Er muss daher der Nebenwinkel zu β sein:

$\alpha = 180 - \beta \approx 180 - 78,5 = 101,5.$

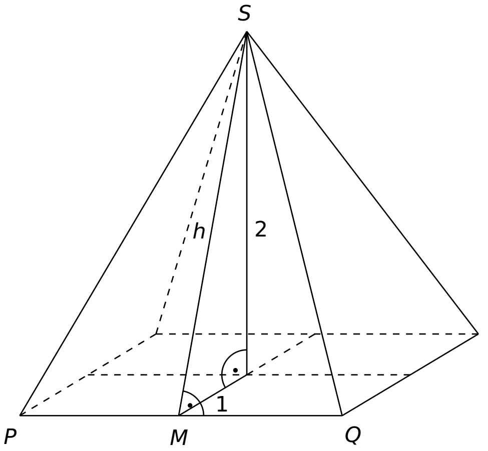
Zwei benachbarte Seitenflächen im Zelt bilden einen Winkel von etwa $101,5$.

b) **Bestimmung des Anteils der Einstiegsöffnung an der Vorderfläche** (5VP)

Ein möglicher Lösungsweg zur Bearbeitung dieser Aufgabe ist z.B. folgender:

Laut Aufgabentext ist die Pyramide 2 m hoch und gerade, die Seiten der Grundfläche sind ebenfalls 2 m lang. Für die Höhe h der Pyramidenseite PQS gilt dann mithilfe des Satzes von Pythagoras:

$h^2 = 1^2 + 2^2 = 5$ bzw. $h = \sqrt{5}$.



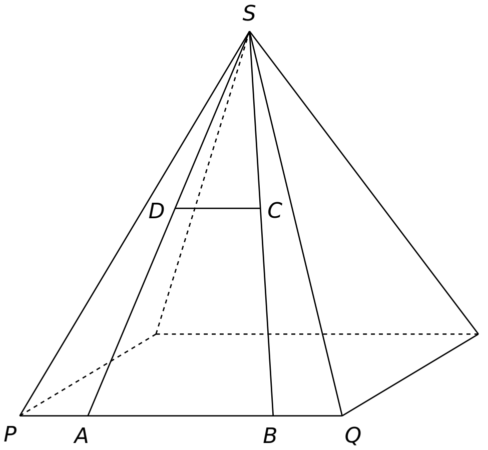
Nach der Dreiecksformel $A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$ gilt dann für den Flächeninhalt des Dreiecks PQS:

$$A_{PQS} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{5} = \sqrt{5} \text{ m}^2.$$

Hinweis: Da das Dreieck PQS gleichschenklig ist, lässt sich seine Höhe auch mithilfe der Vektorrechnung bestimmen: Der Punkt $M(2 \mid 1 \mid 0)$ ist der Mittelpunkt der Strecke PQ. Für die Höhe h gilt dann:

$$h = \overline{MS} = |\overrightarrow{MS}| = \left| \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{5}.$$

Die Punkte C bzw. D sind jeweils die Mittelpunkte von A uns S bzw. B und S. Da die Strecke CD weiterhin parallel zu AB ist, bedeutet dies nach dem zweiten Strahlensatz, dass CD genau **halb so lang** wie AB ist. Ihre Länge beträgt damit $0,5$ m.
Nach dem ersten Strahlensatz hat das Trapez $ABCD$ weiterhin eine Höhe, die genau halb so lang ist wie die Höhe der Pyramide. Somit ist $h_T = \frac{1}{2}\sqrt{5}$.



Für den Flächeninhalt der Einstiegsöffnung, also dem Flächeninhalt des Trapezes $ABCD$ ergibt sich damit:

$$\begin{aligned} A_{ABCD} &= \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{CD}) \cdot h_T \\ &= \frac{1}{2} \cdot (1 + 0,5) \cdot \frac{1}{2}\sqrt{5} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} = \frac{3}{8}\sqrt{5}. \end{aligned}$$

Für den Anteil p der Einstiegsöffnung an der gesamten Vorderfläche gilt damit in Prozent:

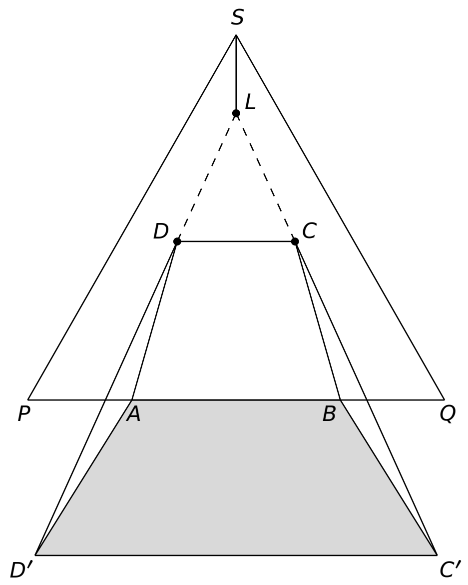
$$p\% = \frac{A_{ABCD}}{A_{PQS}} \cdot 100\% = \frac{\frac{3}{8}\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \cdot 100\% = \frac{3}{8} \cdot 100\% = 0,375 \cdot 100\% = 37,5\%.$$

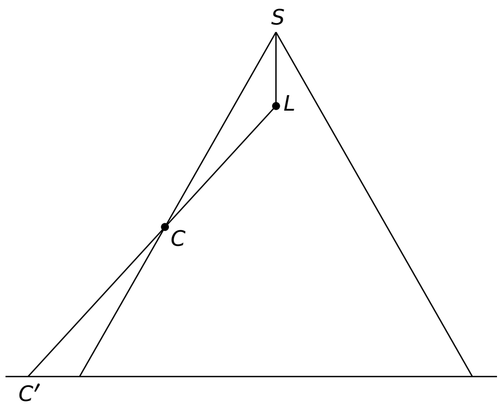
Die Einstiegsöffnung beansprucht $37,5\%$ der gesamten Vorderfläche.

c) **Berechnung der Länge der Strecke $C'D'$** (5VP)

Die Lichtquelle L liegt 25 cm unter der Pyramidenspitze $S(1\,|\,1\,|\,2)$. Sie hat damit die Koordinaten $L(1\,|\,1\,|\,1,75)$.

Nebenstehend ist das Zelt mit dem (grau gefärbten) Lichtteppich in räumlicher Frontalsicht dargestellt. Der Punkt C' liegt genau dort, wo der Lichtstrahl von der Lichtquelle L aus durch den Punkt C auf den Boden auftrifft. Der Boden liegt hier in der x_1x_2-Ebene mit der Koordinatengleichung $x_3 = 0$.
Die Punkte A und B haben einen Abstand von $1,0$ m und liegen symmetrisch in der Seite PQ. Der Punkt A hat somit einen halben Meter Abstand zu $P(2\,|\,0\,|\,0)$ und damit die Koordinaten $A(2\,|\,0,5\,|\,0)$, der Punkt B ist entsprechend $0,5$ m entfernt von Q und hat die Koordinaten $B(2\,|\,1,5\,|\,0)$.
Der Punkt C ist laut Aufgabentext bei b) der Mittelpunkt der Strecke BS mit $S(1\,|\,1\,|\,2)$ und hat damit die Koordinaten $C(1,5\,|\,1,25\,|\,1)$ (seine Koordinaten sind jeweils die Mittelwerte der Koordinaten von B bzw. S).
Entsprechend ist D der Mittelpunkt der Strecke AS, somit hat er die Koordinaten $D(1,5\,|\,0,75\,|\,1)$.





Der Bildpunkt C' ist der Schnittpunkt einer Geraden g durch L und C mit der x_1x_2-Ebene. Für g gilt:

$$g\colon \vec{x} = \overrightarrow{OL} + r\cdot\overrightarrow{LC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1,75 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,25 \\ -0,75 \end{pmatrix}; \quad r \in \mathbb{R}.$$

Durch Einsetzen der Koordinaten von g in die Koordinatengleichung $x_3 = 0$ der x_1x_2-Ebene kann nun der Schnittpunkt C' berechnet werden:

$$g \cap E_{x_1x_2}\colon\ 1,5 - 0,75r = 0$$
$$r = \frac{1,75}{0,75} = \frac{7}{3}$$

Der Schnittpunkt C' liegt somit für $r = \frac{7}{3}$ auf der Geraden g:

$$\overrightarrow{OC'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1,75 \end{pmatrix} + \frac{7}{3}\begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,25 \\ -0,75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{6} \\ \frac{19}{12} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad C'\left(\frac{13}{6} \mid dle \mid \frac{19}{12} \mid dle \mid 0\right).$$

Entsprechend wie oben ergibt sich der zweite Bildpunkt D' als Schnittpunkt einer Geraden h durch L und D mit der x_1x_2-Ebene.

$$h\colon \vec{x} = \overrightarrow{OL} + s \cdot \overrightarrow{LD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1,75 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0,5 \\ -0,25 \\ -0,75 \end{pmatrix}; \quad s \in \mathbb{R}$$

Einsetzen der Koordinaten in $x_3 = 0$:

$$\begin{aligned} h \cap E_{x_1x_2}\colon \quad 1,75 - 0,75s &= 0 \\ s &= \frac{1,75}{0,75} = \frac{7}{3} \end{aligned}$$

Für den Punkt D' ergibt sich damit:

$$\overrightarrow{OD'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1,75 \end{pmatrix} + \frac{7}{3}\begin{pmatrix} 0,5 \\ -0,25 \\ -0,75 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{6} \\ \frac{5}{12} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad D'\left(\frac{13}{6} \mid dle \mid \frac{5}{12} \mid dle \mid 0\right).$$

Für die Länge ℓ der Strecke $C'D'$ ergibt sich letztlich:

$$\ell = \overline{C'D'} = |\overrightarrow{C'D'}| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{14}{12} \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \frac{14}{12} = \frac{7}{6} \approx 1,17.$$

Die Strecke $C'D'$ besitzt eine Länge von $\frac{7}{6} \approx 1,17$ m.