

Aufgabenstellung

Bei der Kunstausstellung „Licht und Schatten“ ist in der Mitte der Ausstellungshalle eine gerade, 1 m hohe Pyramide mit quadratischer Grundfläche von 1 m Seitenlänge ausgestellt.

Die Grundfläche der Pyramide befindet sich (gehalten von vier Stützen) einen Meter über dem Boden der Halle. Die quaderförmige Halle selbst ist 5 m hoch und hat eine quadratische Grundfläche von 9 m Seitenlänge.

In einem kartesischen Koordinatensystem mit Ursprung in einer Hallenecke und entlang der Hallenkanten verlaufenden Koordinatenachsen hat die Grundfläche der Pyramide die Eckpunkte $A(5 \mid 4 \mid 1)$, $B(5 \mid 5 \mid 1)$, $C(4 \mid 5 \mid 1)$ und $D(4 \mid 4 \mid 1)$.

Die Gegebenheiten sind in der **Abbildung 1** auf der nächsten Seite dargestellt.

- a) (1) Zeigen Sie, dass die Pyramidenspitze die Koordinaten $S(4,5 \mid 4,5 \mid 2)$ hat. (14P)
- (2) Berechnen Sie die Seitenlängen des Dreiecks ABS .
- (3) Bestimmen Sie das Volumen und den Oberflächeninhalt der Pyramide.

- b) Die Pyramide wird von einer an der rechten Hallenwand in der Position $L(4,5 \mid 9 \mid 1)$ befestigten punktförmigen Lichtquelle angestrahlt (siehe Abbildung 1). Der Pyramidenschatten auf der gegenüberliegenden Hallenwand ($y = 0$) hat die Form eines Dreiecks. (12P)

Ermitteln Sie die Koordinaten der Eckpunkte dieses Schattendreiecks. Zeigen Sie, dass es sich um ein gleichschenkliges Dreieck handelt, und berechnen Sie seinen Flächeninhalt.

Nachts werden die Kunstwerke in der Halle durch Laser-Lichtschranken gesichert.

- c) Einer der Laserstrahlen ist auf den Punkt $M(4,75 \mid 4,5 \mid 1,5)$ des Dreiecks ABS gerichtet. (16P)
- (1) Zeigen Sie, dass M der Mittelpunkt der Seitenhalbierenden der Dreiecksseite \overline{AB} ist.
- (2) Der Laserstrahl trifft im Punkt M orthogonal auf die Seitenfläche ABS der Pyramide.

Zeigen Sie, dass der Laserstrahl in Richtung des Vektors $\vec{l} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ verläuft, und ermitteln

Sie die Koordinaten der Position der Laser-Lichtquelle an der Wand der Halle.

- d) Eine weitere Laser-Lichtquelle ist so installiert, dass der von ihr ausgehende rotierende Laserstrahl den innerhalb der Halle liegenden Bereich der Ebene (8P)

$$E^* : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad r, s \in \mathbb{R},$$

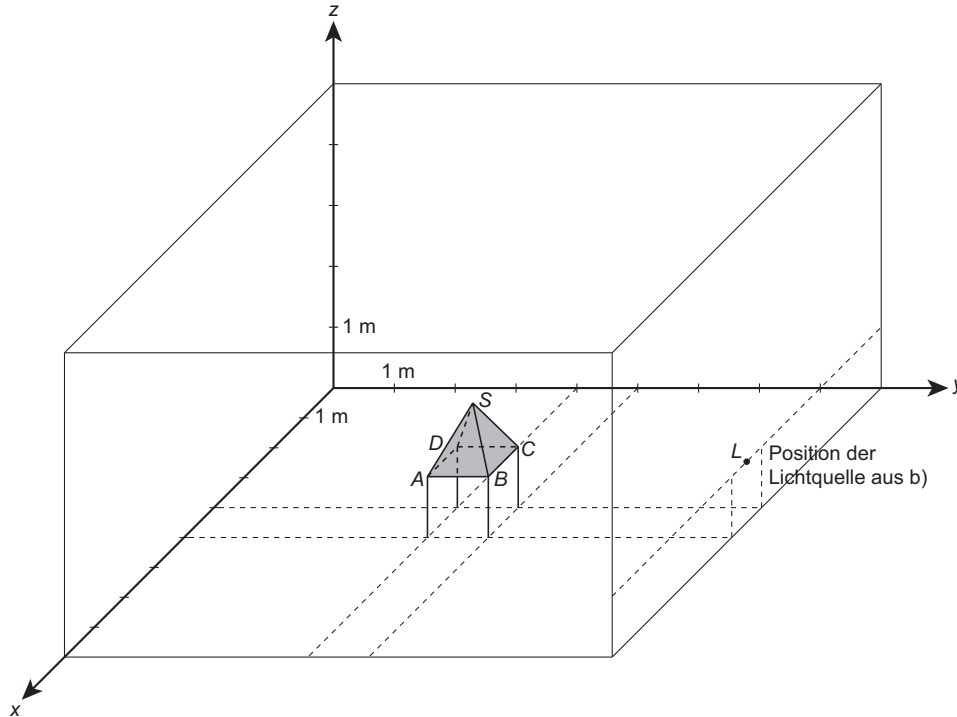
überstreicht. Der Laserstrahl trifft unter anderem die Punkte $F(3 \mid 0 \mid 5)$ und $G(3 \mid 9 \mid 5)$.

- (1) Zeichnen Sie in die Abbildung 2 auf der nächsten Seite die Spur des rotierenden Laserstrahls auf Wänden, Boden und Decke der Halle ein, d. h. alle Punkte der Wände, des Bodens und der Decke der Halle, die zur Ebene E^* gehören.

- (2) Die Ebene E^* und die Ebene $E_{BCS} : 2y + z = 11$, in der die Seitenfläche BCS der Pyramide liegt, schneiden sich in einer Schnittgeraden g .

Entscheiden Sie, ob die Pyramidenkante \overline{BS} auf dieser Schnittgeraden g liegt.

Abbildung 1:



Für die Zeichnung in Teilaufgabe d) (1):

Abbildung 2:

