a) (1) ► **Punktsymmetrie zum Ursprung nachweisen** (9 P)

Allgemein gilt für eine Symmetrie zum Ursprung $f(x) = -f(-x)$. Folglich muss dies auch auf diese Funktion zutreffen, damit die Vorgabe erfüllt ist und der Graph der Funktion punktsymmetrisch zum Ursprung ist.

- Punktsymmetrie zum Ursprung: $f(x) = -f(-x)$

Setze die Vorgabe in einer Gleichung um, sodass folgende Gleichung entsteht.

$$\begin{aligned} f(x) &= -f(-x) \\ 3 \cdot x \cdot \mathrm{e}^{-x^2} &= -(3 \cdot (-x) \cdot \mathrm{e}^{-(-x)^2}) \\ 3 \cdot x \cdot \mathrm{e}^{-x^2} &= -(-3 \cdot x \cdot \mathrm{e}^{-x^2}) \\ 3 \cdot x \cdot \mathrm{e}^{-x^2} &= 3 \cdot x \cdot \mathrm{e}^{-x^2} \end{aligned}$$

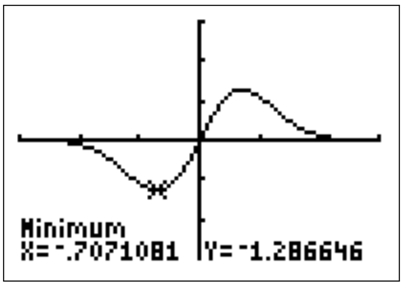
Somit ist die Bedingung erfüllt, sodass die Punktsymmetrie zum Ursprung bewiesen ist.

(2) ► **Hoch- und Tiefpunkte bestimmen**

Für Hoch- und die Tiefpunkte gilt die notwendige Bedingung $f'(x) = 0$. Außerdem muss für einen Hochpunkt $f''(x) < 0$ und für einen Tiefpunkt $f''(x) > 0$ gelten.

- notwendige Bedingung für Extrema $f'(x) = 0$
- Hochpunkt $f''(x) < 0$
- Tiefpunkt $f''(x) > 0$

Die Extrema kannst du mit dem GTR berechnen. Trage zunächst die Funktion in den Funktionen-Editor ein und lasse sie dir zeichnen. Über $\boxed{\text{2nd} \rightarrow \mathit{TRACE}\ \text{(CALC)}}$ und `4: maximum` bzw. $\boxed{\text{2nd} \rightarrow \mathit{TRACE}\ \text{(CALC)}}$ und `3: minimum` kannst du dir dann die Extremstellen berechnen lassen.



Somit ergibt sich der Tiefpunkt T mit $T(-0{,}707 \mid -1{,}287)$ und der Hochpunkt H mit $H(0{,}707 \mid 1{,}287)$.

b) (1) ► **Zeigen, dass F eine Stammfunktion von f ist** (9 P)

Um zu beweisen, dass eine gegebene Funktion die Stammfunktion einer weiteren bereits gegebenen Funktion ist, kannst du die Stammfunktion, soweit keine anderen Voraussetzungen vorhanden, ableiten.
Es muss gelten $F'(x) = f(x)$.

Achte hierbei darauf, dass es sich aufgrund des e-Terms um eine verkettete Funktion handelt und du somit die Kettenregel anwenden musst, um F abzuleiten.

Leite also die Funktion F mit $F(x) = -\frac{3}{2} \cdot \mathrm{e}^{-x^2}$ einmal ab.

$$\begin{aligned} F(x) &= -\frac{3}{2} \cdot \mathrm{e}^{-x^2} \\ F'(x) &= -\frac{3}{2} \cdot \mathrm{e}^{-x^2} \cdot (-2 \cdot x) \\ &= \frac{(-3) \cdot (-2) \cdot x}{2} \cdot \mathrm{e}^{-x^2} \\ &= 3 \cdot x \cdot \mathrm{e}^{-x^2} \end{aligned}$$

Mit $f(x) = 3 \cdot x \cdot \mathrm{e}^{-x^2}$ ergibt sich somit $f(x) = F'(x)$. Somit ist die Aussage bewiesen.

(2) ► **Inhalt der Fläche bestimmen**

Zunächst musst du die Geradengleichung der Gerade OH aufstellen. Diese bestimmt sich über den Punkt H und den Ursprung $O(0 \mid 0)$.
Bestimme dann das Integral beider Kurven innerhalb der Grenzen O und H und subtrahiere das größere vom kleineren, um die eingeschlossene Fläche zu bestimmen.

Die allgemeine Geradengleichung lautet $g : y = m \cdot x + n$. Setze die Punkt O und H ein, um die Parameter m und n zu bestimmen.

- Stelle die Geradengleichung der Gerade OH auf
- allgemeine Geradengleichung: $g : y = m \cdot x + n$, n beschreibt den Schnittpunkt mit der y-Achse, m beschreibt die Steigung der Geraden
- Subtrahiere die Integrale von f und OH von einander, um den gesuchten Flächeninhalt zu bestimmen

1. Schritt: Gerade OH aufstellen

Da OH durch den Ursprung läuft, ist die der y-Achsenabschnitt bereits mit $n = 0$ gegeben. Folglich musst du nur noch m bestimmen. Setze dazu die Koordinaten des Punktes H in die Geradengleichung ein.

$$h(0,5 \cdot \sqrt{2}) = 1,5 \cdot \sqrt{2} \cdot \mathrm{e}^{-0,5}$$

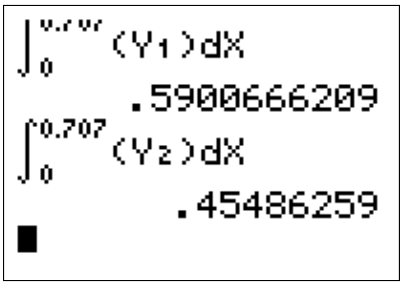
$$\begin{aligned} 1,5 \cdot \sqrt{2} \cdot \mathrm{e}^{-0,5} &= m \cdot 0,5 \cdot \sqrt{2} \qquad \mid : 0,5 \cdot \sqrt{2} \\ 3 \cdot \mathrm{e}^{-0,5} &= m \end{aligned}$$

Folglich ergibt sich m mit $m \approx 1,82$.

Somit ergibt sich die Geradengleichung von OH mit $OH : y = 1,82 \cdot x$.

2. Schritt: Integrale bestimmen und von einander subtrahieren

Das Integral von f und OH kannst du über deinen Rechner bestimmen. Trage dazu zunächst beide Funktionen in den Funktionen-Editor ein. Rufe dazu unter $\boxed{\text{Math}}$ den Befehl `9: fnInt` auf und setze die Grenzen mit $x = 0$ und $x = 0,707$ ein. Suche unter $\boxed{\text{VARS}\rightarrow \text{Y-VARS}\rightarrow \text{1:Function}}$ die Funktionen die du ebenen benannt hast und setze sie in verschiedene Integrale ein.



Somit ergeben sich zwei Integrale mit $I_1 \approx 0,59$ und $I_2 \approx 0,455$. Bilde die Differenz der beiden, um den Flächeninhalt der Fläche zwischen f und OH zu bestimmen.

$I = I_1 - I_2 = 0,59 - 0,455 = 0,135$

Folglich beträgt der Flächeninhalt der Fläche zwischen f und OH ca. $0,135$ FE.

c) (1) ▶ **Tangentengleichungen von t_A und t_B bestimmen** (17 P)

Für eine allgemeine Tangente t lautet die Tangentengleichung $t(x) = f'(x_0) \cdot x + n$.
Gegeben sind die Punkte A und B mit $A(1 \mid f(1))$, an dem die Tangente t_A anliegen soll, und $B(-1 \mid f(-1))$, an dem die Tangente t_B anliegen soll.
Folglich gilt $x_{0A} = 1$ bzw. $x_{0B} = -1$. Setze dies in die allgemeine Tangentengleichung ein.

- $t(x) = f'(x_0) \cdot x + n$
- $f'(x) = (1 - 2 \cdot x^2) \cdot 3\mathrm{e}^{-x^2}$
- Setze die Koordinaten von A und B in t ein

Bestimme zunächst die Steigung der Tangenten, indem du die x-Werte der Berührpunkte in die Ableitung einsetzt. Die Ableitung beschreibt die Steigung der Funktion f an jeder Stelle x.
Daraus ergeben sich für die Tangenten:

$t_A(x) = (1 - 2 \cdot 1^2) \cdot 3\mathrm{e}^{-1^2} \cdot x + c_a$

$t_B(x) = (1 - 2 \cdot (-1)^2) \cdot 3\mathrm{e}^{-(-1)^2} \cdot x + c_b$

Berechne mit deinem Taschenrecher die Steigung, sodass du $m_a = m_b = -1,104$ erhältst.
Stelle nun noch 2 Gleichungen mit $t_a(1) = f(1)$ und $t_b(-1) = f(-1)$ auf und löse nach c_a bzw. c_b auf.

Die Werte für $f(1)$ und $f(-1)$ kannst du über $\boxed{\text{2nd} \rightarrow TRACE\ \text{(CALC)}}$ und `1: value` berechnen lassen.

$f(-1) = -1,104$

$-1,104 = -1,104 \cdot (-1) + c_b \qquad | \ -1,104$

$-2,208 = c_b$

$$f(1) = 1{,}104$$

$$1{,}104 = -1{,}104 \cdot 1 + c_a \qquad | +1{,}104$$

$$2{,}208 = c_a$$

Somit ergeben sich die Tangentengleichungen von t_A und t_B mit $t_A = -1{,}104 \cdot x + 2{,}208$ und $t_B = -1{,}104 \cdot x - 2{,}208$

(2) ▶ **Achsenschnittpunkte bestimmen**

Da die beiden Berührpunkte Spiegelpunkte zu einander sind, musst du nur jeweils einen Achsenschnittpunkt bestimmen und dann das Vorzeichen umdrehen, um auch für die andere Tangente die Achsenschnittpunkte zu erhalten.

Die y-Achsenschnittpunkte hast du bereits im vorherigen Aufgabenteil in Form von c bestimmt, das die y-Koordinaten des y-Achsenschnittpunktes beschreibt.
Für x-Achsenschnittpunkte gilt: $f(x) = 0$.
Für y-Achsenschnittpunkte gilt $f(0) = c$.
Folglich ergeben sich die y-Achsenschnittpunkte mit $A_y(0 \mid 2{,}208)$ und $B_y(0 \mid -2{,}208)$.

Berechne nun die Schnittpunkte mit der x-Achse oder auch Nullstellen genannt. Setze $t_A(x) = 0$.

$$0 = -1{,}104 \cdot x + 2{,}204 \qquad | -2{,}204$$

$$-2{,}204 = -1{,}104 \cdot x \qquad | : (-1{,}104)$$

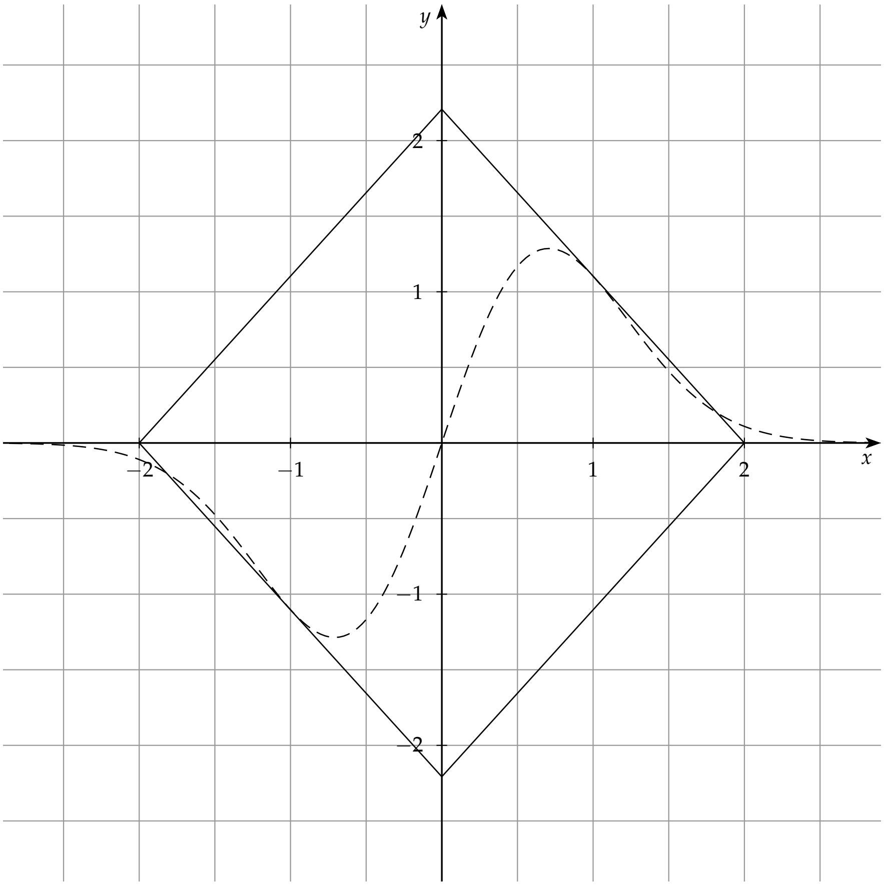
$$2 = x$$

Aufgrund der Punktsymmetrie im Ursprung ergeben sich somit die x-Achsenschnittpunkte mit $A_x(2 \mid 0)$ und $B_x(-2 \mid 0)$.

(3) ▶ **Geeignete Skizze erstellen**

Ein Skizze ist immer dann geeignet, wenn sie den Sachverhalt der Aufgabe passend darstellt oder klärt.
In diesem Fall ist es der Zusammenhang der Achsenschnittpunkte. Diese sollen ein Viereck bilden. Zeichne in ein Koordinatensystem die Achsenschnittpunkte ein und verbinde sie so, dass sich ein Viereck bildet.

Dieses kann dann wie folgt aussehen.



(4) ▶ **Begründen, dass eine Raute vorliegt**

Eine Raute liegt vor, wenn alle vier Seiten gleich lang sind. Die Länge einer Strecke kannst du berechnen über $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

- Berechne die Länge der Seiten über $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

Setze nacheinander die Koordinaten der Punkte A_x, A_y, B_x sowie B_y in die Gleichung $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ ein un prüfe, ob alle Seiten gleich lang sind.

$$\begin{aligned} d1 &= \sqrt{(2-0)^2 + (0-(-2,208))^2} \\ &= \sqrt{2^2 + 2,208^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d2 &= \sqrt{(2-0)^2 + (0-2,208)^2} \\ &= \sqrt{2^2 + 2,208^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d3 &= \sqrt{(-2-0)^2 + (0-(-2,208))^2} \\ &= \sqrt{2^2 + 2,208^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d4 &= \sqrt{(-2-0)^2 + (0-2,208))^2} \\ &= \sqrt{2^2 + 2,208^2} \end{aligned}$$

Somit gilt $d1 = d2 = d3 = d4$. Folglich sind alle Seiten gleich lang, das Viereck ist eine Raute.

(5) ► **Flächeninhalt des Vierecks bestimmen**

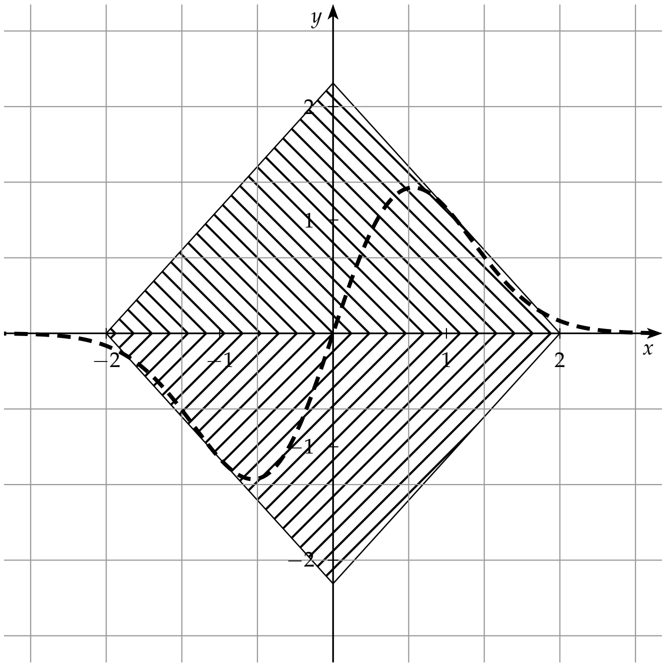
Den Flächeninhalt einer Raute kannst du bestimmen, indem du sie in zwei zueinander kongruente, gleichschenklige Dreiecke aufteilst, deren Flächeninhalt über $A = \frac{1}{2} \cdot |\overline{OA_y}| \cdot |\overline{A_x B_x}|$ bestimmen kannst.

Folglich hat die Raute den Flächeninhalt $A_R = 2 \cdot A$.

Aufgrund der Symmetrie im Ursprung gilt für $|\overline{A_x B_x}| = 2 \cdot x_A$.

- Teile die Raute in 2 Dreiecke mit dem Flächeninhalt A
- $A = \frac{1}{2} \cdot \overline{OA_y} \cdot \overline{A_x B_x}$
- $|\overline{A_x B_x}| = 2 \cdot x_A$

Das folgende Schaubild zeigt den Flächeninhalt der Raute aufgeteilt in zwei gleichschenklige Dreiecke.



Für $|\overline{A_x B_x}|$ ergibt sich somit mit $x_A = 2$:

$|\overline{A_x B_x}| = 2 \cdot x_A$

$|\overline{A_x B_x}| = 2 \cdot 2$

$|\overline{A_x B_x}| = 4$

$|\overline{OA_y}|$ wird beschrieben durch den $y-$Achsenabschnitt der Tangenten t_a.

Somit gilt $c_a = |\overline{OA_y}|$.

Mit $c_a = 2,207$ ergibt sich somit $|\overline{OA_y}| = 2,207$.

Setze diese Werte in die Formel $A = \frac{1}{2} \cdot |\overline{OA_y}| \cdot |\overline{A_x B_x}|$ und berechne so den Flächeninhalt eines Dreiecks.

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \cdot |\overline{OA_y}| \cdot |\overline{A_xB_x}| \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2,207 \cdot 4 \\ &= 2,207 \cdot 2 \\ &= 4,414 \end{aligned}$$

Folglich ergibt sich $A = 4,414$. Setze dies nun in die Formel $A_R = 2 \cdot A$ ein, um den Flächeninhalt der Raute zu berechnen.

$$\begin{aligned} A_R &= 2 \cdot A \\ &= 2 \cdot 4,414 \\ &= 8,828 \end{aligned}$$

Somit hat die Raute eine Flächeninhalt von $A_R = 8,828$ FE.

d) (1) ► **Geeignete Skizze erstellen** (15 P)

Um eine geeignete Skizze zu erstellen musst du dir zunächst eine Funktion definieren, die geforderten Eigenschaften besitzt.

Sie soll den Ursprung schneiden, zweimal differenzierbar sein und für $x > 0$ soll gelten $h(x) > 0$.

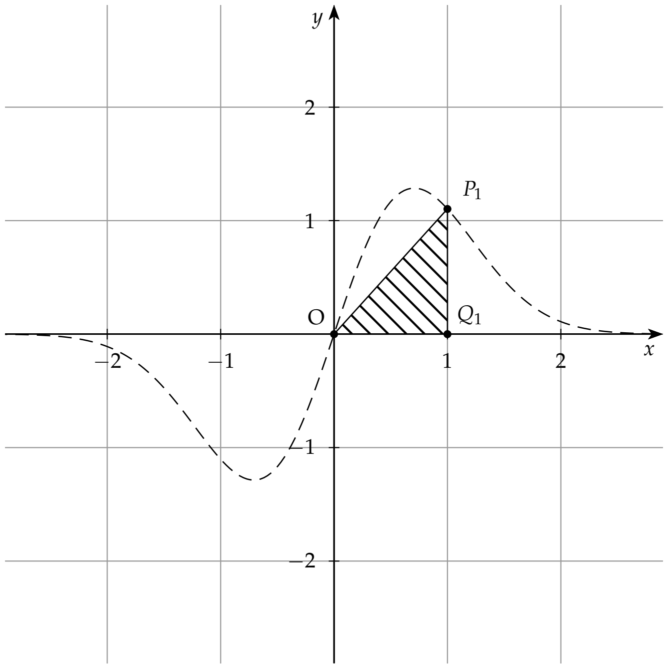
Betrachtest du die Funktion f, so siehst, du dass diese Eigenschaften genau auf sie zutreffen.

Um das Dreieck OQ_uP_u zu zeichnen, musst du dann noch einen Wert für u definieren und somit konkrete Werte der Punkte berechnen.

- Verwende f zum Skizzieren der Gegebenheiten
- Definiere einen Wert für u und berechne die Koordinaten der Punkte
- Spanne das Dreieck OQ_uP_u anhand der konkreten Werte auf

Setze $u = 1$ und berechne die Punkte, die sich damit ergeben mit $Q_1(1 \mid 0)$ und $P_1(1 \mid f(1))$, wobei sich für $f(1)$ der Wert $f(1) = 3 \cdot 1 \cdot \mathrm{e}^{-1^2} \approx 1,104$ ergibt.

Zeichne die Punkte und die Kurve von f nun in das Koordinatensystem ein.



(2) ▶ **Flächeninhalt begründen**

Der Flächeninhalt eines Dreiecks berechnet sich allgemein über $A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h$.

Die Strecke $\overline{OQ_u}$ bildet hier die Grundseite a, während die Strecke $\overline{Q_uP_u}$ die Höhe h darstellt, da sich aufgrund der gleichen x-Koordinaten von P_u und Q_u ein rechter Winkel des Dreiecks am Punkt Q_u bildet.
Setze diese Bedingungen in die allgemeine Formel zur Berechnung des Flächeninhalts ein.

- Rechter Winkel an Q_u, da $u = u$ und somit $\overline{OQ_u} \perp \overline{Q_uP_u}$
- $a = \overline{OQ_u}$
- $h = \overline{Q_uP_u}$

Berechne zunächst die Länge von $\overline{OQ_u}$ in Abhängigkeit von u. Diese berechnest du wie folgt:

$a = |\overline{OQ_u}| = \sqrt{(u-0)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{u^2} = u$

Berechne nun die Länge von $\overline{Q_uP_u}$, um die Höhe herauszufinden.

$h = |\overline{Q_uP_u}| = \sqrt{(u-u)^2 + (h(u)-0)^2} = \sqrt{h(u)^2} = h(u)$

Mit $h = h(u)$ und $a = u$ ergibt sich dann folgender Flächeninhalt in Abhängigkeit von u.

$A = \frac{1}{2} \cdot u \cdot h(u)$

Dies entspricht der gegebenen Gleichung, sodass diese bewiesen ist.

(3) ► **Term der Extremstelle beweisen**

Für eine Extremstelle lautet die notwendige Bedingung, dass $A'(u) = 0$.

Folglich musst du zunächst $A(u)$ ableiten und im Anschluss $u = u_E$ setzen, um die Aussage zu prüfen.

Löse dann die Gleichung nach $h'(u_E)$ auf.

- notwendige Bedingung der Extremstelle: $A'(u) = 0$
- A_u ableiten und $u = u_E$ setzen
- Gleichung $A'(u) = 0$ nach $h'(u_E)$ auflösen

Leite zunächst die Funktion A ab, wobei du auf die Produktregel achten musst, da sich bei dem Term der Flächeninhaltsberechnung um ein Produkt handelt.

$$A(u) = \frac{1}{2} \cdot u \cdot h(u)$$

$$A'(u) = \frac{1}{2} \cdot h(u) + \frac{1}{2} \cdot u \cdot h'(u)$$

Setze nun $u = u_E$, sodass du folgende Gleichung für A' erhältst.

$$A'(u_E) = \frac{1}{2} \cdot h(u_E) + \frac{1}{2} \cdot u_E \cdot h'(u_E)$$

Setze nun die Ableitungsfunktion $A' = 0$ und löse die Gleichung nach h' auf.

$$\begin{aligned}
A'(u) &= 0 \\
0 &= \frac{1}{2} \cdot h(u_E) + \frac{1}{2} \cdot u_E \cdot h'(u_E) && \mid -\frac{1}{2} \cdot u \cdot h'(u_E) \\
-\frac{1}{2} \cdot u_E \cdot h'(u_E) &= \frac{1}{2} \cdot h(u_E) && \mid \cdot 2 \\
-u_E \cdot h'(u_E) &= h(u_E) && \mid : -u_E \\
h'(u_E) &= -\frac{h(u_E)}{u_E}
\end{aligned}$$

Da diese Gleichung mit der gegebenen übereinstimmt, ist sie bewiesen.

► **Gleichung des lokalen Maximums beweisen**

Die Bedingung für ein lokales Maximum lautet $A''(u) < 0$.

Folglich musst du zunächst die 2. Ableitung bestimmen, diesen vereinfachen und dann $A''(u_E) < 0$ setzen.

- A' ein weiteres Mal ableiten
- Term der 2. Ableitung vereinfachen
- Setze $A''(u_E) < 0$

Leite zunächst die Funktion A' ab, um die Ableitungsfunktion A'' zu bestimmen, die die 2. Ableitung von A darstellt.

Achte auch hierbei auf die Produkt- sowie die Summenregel des Ableitens.

$$A'(u) = \frac{1}{2} \cdot h(u_E) + \frac{1}{2} \cdot u_E \cdot h'(u_E)$$

$$\begin{aligned} A''(u) &= \frac{1}{2} \cdot h'(u) + \frac{1}{2} \cdot h'(u) + \frac{1}{2}h''(u) \cdot u \\ &= h'(u) + \frac{1}{2}h''(u) \cdot u \end{aligned}$$

Somit ergibt sich $A''(u) = h'(u) + \frac{1}{2}h''(u) \cdot u$. Setze $u = u_E$ um u_E auf ein lokales Maximum zu prüfen.

Setze $A''(u_E) < 0$, um auf das lokale Maximum zu prüfen. Daraus ergibt sich folgende Gleichung.

$$h'(u_E) + \frac{1}{2}h''(u_E) \cdot u_E < 0$$

Da diese Bedingung gezeigt werden soll, ist somit die Fragestellung erfüllt.

(4) ▶ **a bestimmen, das größten Flächeninhalt bedingt**

Die Aufgabenstellung weist dich bereits daraufhin, dass du die Bedingungen aus d) (3) verwenden sollst, um a zu bestimmen.

Ersetze folglich $h(u_E) = f(a)$ und $u_E = a$.

Somit benötigst du nur noch die Ableitungsfunktion von f.

- Leite f zweimal ab
- Setze $h(u_E) = f(a)$ und $u_E = a$
- Untersuche, ob die Gleichungen für a eine wahre Aussage ergeben

Leite zunächst die Funktion f zweimal ab. Achte dabei auf die Produkt-, Ketten- sowie auf die Summenregel.

$$f(x) = 3 \cdot x \cdot \mathrm{e}^{-x^2}$$

$$f'(x) = 3 \cdot \mathrm{e}^{-x^2} - 3 \cdot 2 \cdot x \cdot \mathrm{e}^{-x^2}$$

$$f''(x) = -6 \cdot x \cdot \mathrm{e}^{-x^2} - 6 \cdot \mathrm{e}^{-x^2} - 12 \cdot x^2 \cdot \mathrm{e}^{-x^2}$$

Setze nun $x = a$ und prüfe für welches a die Bedingung $f'(a) = -\frac{f(a)}{a}$ erfüllt wird.

$$\begin{aligned} f'(a) &= -\frac{f(a)}{a} && \\ 3 \cdot \mathrm{e}^{-a^2} - 6 \cdot a \cdot \mathrm{e}^{-a^2} &= -\frac{3 \cdot a \cdot \mathrm{e}^{-a^2}}{a} && |: \mathrm{e}^{-a^2} \\ 3 - 6 \cdot a &= -3 && | \; -3 \\ -6 \cdot a &= -6 && |: (-6) \\ a &= 1 && |: (-6) \end{aligned}$$

Somit ergibt sich für $a = 1$ im ersten Quadrant ein Extremum.

Setze diesen Wert in die 2. Bedingung ein, um zu klären, ob es sich um ein Maximum handelt.

$$\begin{aligned} A''(1) &< 0 \\ -6\cdot 1\cdot \mathrm{e}^{-1^2} - 6\cdot \mathrm{e}^{-1^2} - 12\cdot 1^2\cdot \mathrm{e}^{-1^2} &< 0 \\ -6\cdot \mathrm{e}^{-1^2} - 6\cdot \mathrm{e}^{-1^2} - 12\cdot \mathrm{e}^{-1^2} &< 0 \\ -24\cdot \mathrm{e}^{-1} &< 0 \end{aligned}$$

Da die e-Funktion niemals gleich oder kleiner Null wird, ist somit bewiesen, dass für $a = 1$ das Dreieck im 1. Quadrant den maximalen Flächeninhalt einnimmt.