1. **► Schnittpunkte mit der x-Achse berechnen** (14BE)

Setze $f(x) = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{6}x^3 - 2x^2 + 6x &= 0 && \mid x \text{ ausklammern} \\ x \cdot \left(\frac{1}{6}x^2 - 2x + 6\right) &= 0 \\ x_1 &= 0 \\ \frac{1}{6}x^2 - 2x + 6 &= 0 && \mid \cdot 6 \\ x^2 - 12x + 36 &= 0 && p\text{-}q\text{-Formel anwenden} \\ x_{2,3} &= 6 \pm \sqrt{36 - 36} = 6 \end{aligned}$$

Der Graph von f schneidet die x-Achse in den Punkten $N_1\,(0 \mid 0)$ und $N_2\,(6 \mid 0)$.

► Extrem- und Wendepunkte berechnen

Zur Bestimmung der Extrem- und Wendepunkte benötigst du die ersten drei Ableitungen von f.

$$f'(x) = \frac{3}{6}x^2 - 4x + 6 = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 6$$

$$f''(x) = \frac{2}{2}x - 4 = x - 4$$

$$f'''(x) = 1$$

1. Schritt: Extrema berechnen

Setze $f'(x) = 0$:

$$\begin{aligned} f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 6 &= 0 && \mid \cdot 2 \\ x^2 - 8x + 12 &= 0 && \mid p\text{-}q\text{-Formel anwenden} \\ x_{1,2} &= 4 \pm \sqrt{16 - 12} = 4 \pm \sqrt{4} = 4 \pm 2 \\ x_1 &= 6 \\ x_2 &= 2 \end{aligned}$$

Setze die gefundenen x-Werte in die zweite Ableitung ein:

$f''(6) = 6 - 4 = 2 \quad > 0$: Tiefpunkt
$f''(2) = 2 - 4 = -2 \quad < 0$: Hochpunkt

Bestimme zuletzt die zugehörigen y-Koordinaten:

$$f(6) = \frac{1}{6} \cdot 6^3 - 2 \cdot 6^2 + 6 \cdot 6 = 36 - 72 + 36 = 0 \quad \Rightarrow T\,(6 \mid 0) = N_2$$

$$f(2) = \frac{1}{6} \cdot 2^3 - 2 \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 = \frac{4}{3} - 8 + 12 = \frac{16}{3} \quad \Rightarrow H\left(2 \mid \tfrac{16}{3}\right)$$

2. Schritt: Wendepunkte berechnen

Setze $f''(x) = 0$:

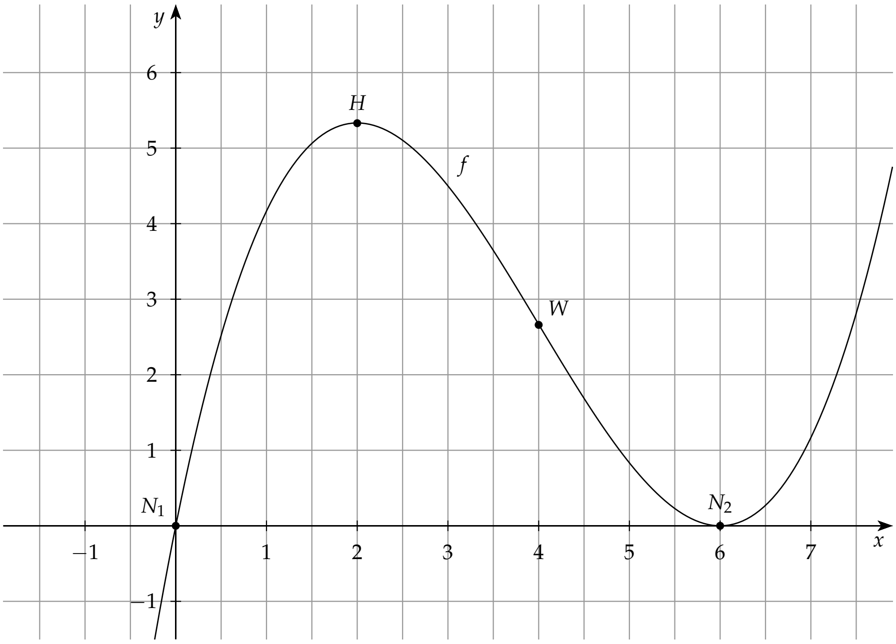
$$\begin{aligned} f''(x) = x - 4 &= 0 && \mid +4 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Wegen $f'''(4) = 1 \neq 0$ handelt es sich tatsächlich um eine Wendestelle.

Bestimme zuletzt die zugehörigen y-Koordinate:

$$f(4) = \frac{1}{6} \cdot 4^3 - 2 \cdot 4^2 + 6 \cdot 4 = \frac{32}{3} - 32 + 24 = \frac{8}{3} \quad \Rightarrow W\,(4 \mid \tfrac{8}{3})$$

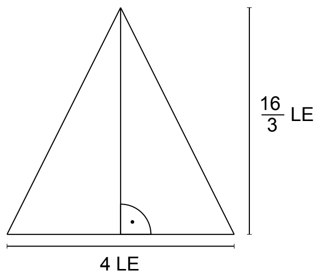
▶ **Punkte einzeichnen**



2. ▶ **Verhältnis der Flächen berechnen** (8BE)

1. Schritt: Dreiecksfläche berechnen

Nach der Achsenbeschriftung folgt $k = 4$. Die Eckpunkte unseres Dreiecks sind also $A\,(0 \mid 0)$, $B\,(4 \mid 0)$ und $C = H\left(2 \mid \frac{16}{3}\right)$.



Den Flächeninhalt eines Dreiecks berechnest du nach der Formel $A_1 = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$, wobei g die Grundseite und h die Höhe des Dreiecks sind. In unserem Fall ist $g = 4$ und $h = \frac{16}{3}$.
Damit folgt $A_1 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{16}{3} = \frac{32}{3}$.

2. Schritt: Fläche unter dem Graphen berechnen

Den Inhalt der eingeschlossenen Fläche kannst du über ein Integral berechnen. Als untere Grenze dient die Nullstelle $x = 0$, als obere Grenze $x = k = 4$.

$$
\begin{aligned}
A_2 &= \int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^4 \left(\frac{1}{6}x^3 - 2x^2 + 6x\right)\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4}x^4 - 2 \cdot \frac{1}{3}x^3 + 6 \cdot \frac{1}{2}x^2\right]_0^4 \\
&= \left[\frac{1}{24}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 3x^2\right]_0^k \\
&= \left(\frac{1}{24} \cdot 4^4 - \frac{2}{3} \cdot 4^3 + 3 \cdot 4^2\right) - 0 \\
&= \frac{256}{24} - \frac{128}{3} + 48 \\
A_2 &= 16
\end{aligned}
$$

3. Schritt: Verhältnis berechnen

Für das Verhältnis der Flächeninhalte zueinander gilt nun:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{\frac{32}{3}}{16} = \frac{32}{3} \cdot \frac{1}{16} = \frac{2}{3}$$

Die Flächeninhalte stehen im Verhältnis 2:3.

3. ▶ **Term von h bestimmen** (8BE)

Die Höhe des Ballons wird durch die Funktion h beschrieben. h ist eine Stammfunktion von h'. Wir erhalten deshalb zunächst:

$$h(t) = \int h'(t)\,\mathrm{d}t = 3{,}75 \cdot \frac{1}{3}t^3 - 60 \cdot \frac{1}{2}t^2 + 180t + C = 1{,}25t^3 - 30t^2 + 180t + C$$

Als zusätzliche Bedingung ist gegeben, dass sich der Ballon zum Zeitpunkt $t = 0$ auf Meereshöhe, also auf Höhe $h = 0$ befindet. Der Graph von h muss also durch den Punkt $(0 \mid 0)$ verlaufen. Damit folgt:

$$h(0) = 0 = 1{,}25 \cdot 0 - 30 \cdot 0 + 180 \cdot 0 + C = 0 + C \quad \Rightarrow C = 0$$

Wir erhalten so die Funktionsgleichung $h(x) = 1{,}25t^3 - 30t^2 + 180t$.

▶ **Bedeutung der ersten Ableitung erklären**

Die erste Ableitung beschreibt immer die **Änderungsrate**. Da $h(t)$ die Höhe des Ballons in Abhängigkeit von der Zeit angibt, gibt uns $h'(t)$ die **Steig- oder Sinkgeschwindigkeit** des Ballons zu einem bestimmten Zeitpunkt t an. Der Ballon steigt, wenn $h'(t) > 0$ und er sinkt, wenn $h'(t) < 0$.

Da $h(t)$ in Metern und t in Minuten gemessen wird, hat die Steig- bzw. Sinkgeschwindigkeit die Einheit $\frac{\text{m}}{\text{min}}$.

▶ **Zeitpunkt bestimmen**

$h'(t)$ gibt uns die Steig- bzw. Sinkgeschwindigkeit zu einem bestimmten Zeitpunkt t an. Gefragt ist nach dem Zeitpunkt, zu dem der Ballon am schnellsten sinkt, also nach dem **größten negativen** Funktionswert, den h' annehmen kann. Dies ist das **Minimum** von h'.

Da sowohl h als auch h' im Intervall $[0;12]$ definiert sind, müssen wir die Funktion anschließend auch auf **Randminima** prüfen.

1. Schritt: Lokales Minimum von h' berechnen

Das Minimum von h' ist die **Wendestelle** von h. Du benötigst also die zweite und die dritte Ableitung von h:

$$h''(t) = 2 \cdot 3{,}75t - 60 = 7{,}5t - 60$$
$$h'''(t) = 7{,}5$$

Setze $h''(t) = 0$:
$$\begin{aligned} h''(t) = 7{,}5t - 60 &= 0 && \mid +60 \\ 7{,}5t &= 60 && \mid :7{,}5 \\ t &= 8 \end{aligned}$$

Wegen $h'''(8) = 7{,}5 > 0$ liegt an dieser Stelle tatsächlich ein Minimum von h' vor. Die Sinkgeschwindigkeit beträgt an dieser Stelle $h'(8) = 3{,}75 \cdot 8^2 - 60 \cdot 8 + 180 = -60\,\frac{\text{m}}{\text{min}}$.

2. Schritt: h' auf Randminima prüfen

Wir prüfen, ob h' am **Anfang** oder am **Ende** des Intervalls noch kleinere Funktionswerte annimmt.

$h'(0) = 3{,}75 \cdot 0 - 60 \cdot 0 + 180 = 180$
$h'(12) = 3{,}75 \cdot 12^2 - 60 \cdot 12 + 180 = 0$

Es liegt kein Randminimum vor. Damit gilt: Zum Zeitpunkt $t = 8$ sinkt der Ballon mit $-60\,\frac{\text{m}}{\text{min}}$ am schnellsten.

4. **▶ Term von p bestimmen** (10BE)

p soll eine Parabel zweiten Grades sein. Aus der Aufgabenstellung und aus der Abbildung 2 weißt du:

- Der **Scheitelpunkt** der Parabel ist $S\,(8 \mid 0)$
- Die Parabel verläuft durch den Punkt $P\,(4 \mid 320)$

Du kannst die Funktionsgleichung der Parabel also über die **Scheitelpunktform** berechnen:
$y = a \cdot (x - x_S)^2 + y_S$.
Dabei sind $(x_S \mid y_S)$ die Koordinaten des Scheitelpunkts. Setze sie ein und erhalte die Gleichung:
$y = a \cdot (x - 8)^2$.
Setze weiter die Koordinaten von $P\,(4 \mid 320)$ ein, um a zu bestimmen:
$320 = a \cdot (4 - 8)^2 \;\Leftrightarrow\; 320 = a \cdot (-4)^2 \;\Leftrightarrow\; 320 = 16a \;\Leftrightarrow\; a = 20.$
Damit folgt die Funktionsgleichung $p : y = 20 \cdot (x - 8)^2$.