

a) (1) ► **Zeichnen des Baumdiagramms**

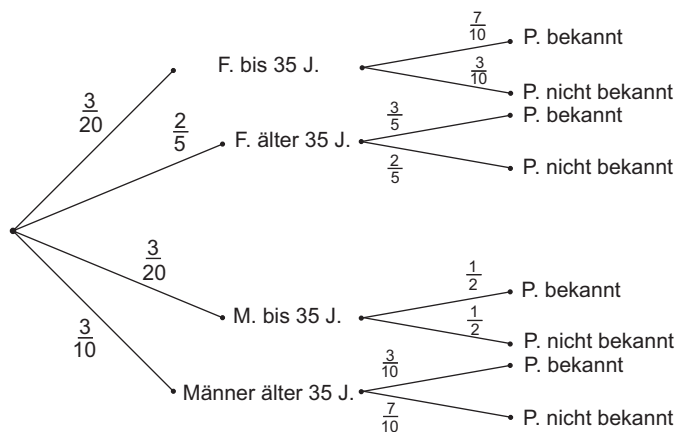
(14 BE)

Hier liegt ein zweistufiges Zufallsexperiment vor. Die erste Stufe des Zufallsexperiments beschreibt das Ereignis, eine Frau oder einen Mann eines bestimmten Alters befragt zu haben. Die zweite Stufe beschreibt das Ereignis, dass dieser Person das angebotene Produkt bekannt war oder nicht.

Die Wahrscheinlichkeiten der ersten Stufe ergeben sich aus den relativen Häufigkeiten, welche in der dritten Spalte der Tabelle gegeben sind. Die Wahrscheinlichkeiten der zweiten Stufe ergeben sich aus dem Prozentsatz des Anteils, welcher den Bekanntheitsgrad des Produkts in der betrachteten Bevölkerungsgruppe repräsentiert.

Gebe die Prozentsätze als vollständig gekürzte Brüche in deinem Baumdiagramm an.

Dein Baumdiagramm sollte so aussehen:



(2) ► **Berechnen des Bekanntheitsgrad**

Den Bekanntheitsgrad des Produkts bei Personen über 18 Jahren berechnest du, indem du die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass das Produkt Personen der einzelnen Bevölkerungsgruppen bekannt ist, aufsummierst.

Bei der Berechnung kann dir das Baumdiagramm behilflich sein. Gehe dazu die jeweiligen Pfade der benötigten Teilereignisse ab und bilde das Produkt der Wahrscheinlichkeiten der verschiedenen Stufen.

Wahrscheinlichkeiten der Teilereignisse:

(1) Gruppe I wird befragt; Produkt bekannt:

$$P(I \cap P. b.) = \frac{3}{20} \cdot \frac{7}{10} = \frac{21}{200}$$

(2) Gruppe II wird befragt; Produkt bekannt:

$$P(II \cap P. b.) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{25}$$

(3) Gruppe III wird befragt; Produkt bekannt:

$$P(III \cap P. b.) = \frac{3}{20} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{40}$$

(4) Gruppe IV wird befragt; Produkt bekannt:

$$P(IV \cap P. b.) = \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{9}{100}$$

Bilde nun die Summe der Wahrscheinlichkeiten der Teilereignisse um den Bekanntheitsgrad des Produkts in der Bevölkerung zu bestimmen:

$$\begin{aligned}\text{Bekanntheitsgrad} &= P(I \cap P. b.) + P(II \cap P. b.) + P(III \cap P. b.) + P(IV \cap P. b.) \\ &= \frac{21}{200} + \frac{6}{25} + \frac{3}{40} + \frac{9}{100} \\ &= \frac{51}{100}\end{aligned}$$

Der Bekanntheitsgrad des Produkts in der gesamten Bevölkerung beträgt 51 %

(3) ► **Berechnen der bedingten Wahrscheinlichkeit**

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Person, welche das Produkt kennt, aus der Gruppe III stammt, berechnest du über die Formel für bedingte Wahrscheinlichkeiten. Teile dazu die Wahrscheinlichkeit, dass einer Person aus Gruppe III das Produkt bekannt ist, durch die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person, unabhängig von den Bevölkerungsgruppen, das Produkt kennt.

Die Wahrscheinlichkeit $P(b)$, dass einer Person unabhängig von ihrer Bevölkerungsgruppe das Produkt bekannt ist, entspricht dem Bekanntheitsgrad des Produkts, welchen du im vorhergegangenen Aufgabenteil bestimmt hast. Die Wahrscheinlichkeit, dass einer Person der Bevölkerungsgruppe III das Produkt bekannt ist, berechnest du wie oben mit Hilfe des Baumdiagramms.

Berechnen der bedingten Wahrscheinlichkeit $P_b.(III)$:

$$P_b.(III) = \frac{P(III \cap P. b.)}{P(b)}$$

$$P_b.(III) = \frac{\frac{3}{40}}{0,51}$$

$$P_b.(III) = 0,147$$

Die gesuchte bedingte Wahrscheinlichkeit ist:

$$P_b.(III) \approx 0,147 (\approx 14,7\%).$$

b) ► **Berechnen der gesuchten Wahrscheinlichkeiten**

(5 BE)

In dieser Teilaufgabe werden insgesamt 100 zufällig ausgewählte Personen befragt. Bei den gesuchten Wahrscheinlichkeiten wird jeweils eine der vier Bevölkerungsgruppen betrachtet, was bedeutet, dass die erste Stufe des Zufallexperiments wegfällt und die zweite Stufe die jeweiligen Ausgänge des Zufallexperiments bestimmt. Das bedeutet, die betrachteten Zufallsvariablen können hier als binomialverteilt angenommen werden.

Sind Zufallsvariablen binomialverteilt, so können diese nur zwei verschiedene Merkmalsausprägungen annehmen, die Wahrscheinlichkeit für diese Ausprägungen sind konstant, da es sich um Ziehen mit Zurücklegen handelt. Das bedeutet auch, dass die Grundgesamtheit die gleiche bleibt und die Zufallsexperimente damit unabhängig voneinander sind.

(1) ► **Weniger als 25 Personen der Gruppe I kennen das Produkt nicht**

Die Wahrscheinlichkeit, dass einer Person der Gruppe I das Produkt nicht bekannt ist, ist $p = \frac{3}{10}$. Die betrachtete Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl der Personen der Gruppe I, welchen das Produkt nicht bekannt ist, gesucht ist also die Wahrscheinlichkeit $P(X < 25)$.

Die Wahrscheinlichkeit $P(X < 25)$ entnimmst du der Tabelle der kumulierten Wahrscheinlichkeiten für die Binomialverteilung.

n ist dabei die Anzahl der insgesamt befragten Personen, also $n = 100$.

k ist dabei die Anzahl der Personen der Gruppe I, welche das Produkt nicht kennen, also $k \leq 24$.

p ist die Wahrscheinlichkeit, dass einer befragten Personen das Produkt nicht bekannt ist, also $p = 0,3$.

Die Wahrscheinlichkeit ist demnach:

$$P(X < 25) \approx 0,1136.$$

(2) ► **Mehr als 45, aber höchstens 55 Personen der Gruppe III kennen das Produkt**

Die Zufallsvariable X beschreibt hier die Anzahl der Personen der Gruppe III, welchen das Produkt bekannt ist. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person der Gruppe III das Produkt kennt, ist $p = \frac{1}{2}$. Gesucht ist also diese Wahrscheinlichkeit: $P(45 < X \leq 55)$.

Diese Wahrscheinlichkeit bestimmst du ebenfalls über die Tabelle für die kumulierten Wahrscheinlichkeiten der Binomialverteilung. Gehe dabei vor wie im Aufgabenteil zuvor. Forme jedoch den Term zuerst wie folgt um und entnehme anschließend der Tabelle die gesuchten Wahrscheinlichkeiten:

$$P(45 < X \leq 55) = P(46 \leq X \leq 55) = P(X \leq 55) - P(X \leq 45) = 0,8644 - 0,1841 \approx 0,6803.$$

Die Wahrscheinlichkeit ist demnach:

$$P(45 < X \leq 55) \approx 0,6803.$$

(3) ► **Mindestens 36 Personen der Gruppe IV kennen das Produkt**

Die Zufallsvariable X beschreibt hier die Anzahl der Personen der Gruppe IV, welche das Produkt kennen. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person der Gruppe IV das Produkt kennt ist, $p = 0,3$. Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses, dass mindestens 36 Personen der Gruppe IV das Produkt kennen, berechnest du über das zugehörige Gegenereignis. Gehe beim bestimmen der gesuchten Wahrscheinlichkeiten wie in den vorherigen Aufgabenteilen vor.

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit zum Ereignis $P(X \geq 36)$ bestimmst du so:

$$P(X \geq 36) = 1 - P(X \leq 35) = 1 - 0,8839 \approx 0,1161.$$

c) ► **Erläutern, was berechnet wurde**

(4 BE)

Analysiere die Rechnung Zeile für Zeile:

Erste Zeile: $P(X \geq 1) > 0,99$

Die Zufallsvariable X beschreibt die Anzahl der Personen der Gruppe III, welchen das Produkt bekannt ist. Hier wird die Anzahl n der Personen gesucht, die man befragen muss, damit die Wahrscheinlichkeit mindestens eine Person zu befragen, welcher das Produkt bekannt ist, 99% beträgt.

Zweite Zeile: $1 - 0,5^n > 0,99$

Hier wird mit Hilfe des Gegenereignisses diese Anzahl n berechnet, X ist dabei eine binomialverteilte Zufallsvariable (siehe Aufgabenteil b). Ist eine Zufallsvariable binomialverteilt, so berechnet sich die Gesamtwahrscheinlichkeit mehrerer unabhängiger Zufallsversuche über das Produkt der Wahrscheinlichkeiten der zugehörigen Teilereignisse. Der oben gegebene Ansatz wurde dafür wie folgt umgeformt:

$$P(X \geq 1) = 0,99$$

$$1 - P(X \leq 1) = 0,99$$

$$1 - 0,5^n = 0,99$$

Dritte Zeile:

Die Lösung der Gleichung ist $n > 6$. Das heißt, es müssen mindestens 6 Personen befragt der Gruppe III werden, damit mit 99 % Wahrscheinlichkeit mindestens eine der befragten Personen das Produkt kennt.

d) ▶ **Entwickeln und Formulieren eines Entscheidungsverfahrens**

(7 BE)

Bei der oben beschriebenen Situation handelt es sich ganz offensichtlich um einen Hypothesentest, bei dem die Frage überprüft wird, ob der Bekanntheitsgrad des Produkts bei Männern über 35 Jahren (Gruppe IV) gestiegen ist.

Das heißt, es lassen sich folgende Hypothesen formulieren:

$p_0 = 0,3$, der Bekanntheitsgrad ist nicht gestiegen. Diese Hypothese soll verworfen werden (Nullhypothese).

$p_1 > 0,3$, der Bekanntheitsgrad ist gestiegen. Diese Hypothese will man bestätigen.

Werden 100 zufällig ausgewählte Personen befragt, so kannst du mit Hilfe des Erwartungswertes die durchschnittliche Anzahl der Personen berechnen, welchen das Produkt bekannt ist. Die Zufallsvariable X beschreibt hier Personen der Gruppe IV, welche das Produkt kennen, und ist wie in den Aufgabenteilen zuvor binomialverteilt. Berechne nun den Erwartungswert $E(X)$ und somit die Anzahl der Personen der Gruppe IV, die das Produkt nach dem alten Bekanntheitsgrad kennen müssten:

$$E(X) = n \cdot p_0 = 100 \cdot 0,3 = 30$$

Bei 100 befragten Personen der Gruppe IV müssten durchschnittlich 30 Personen, nach dem alten Bekanntheitsgrad, das Produkt kennen. Geben nun besonders wenige Personen an, dass Produkt zu kennen, wird die Nullhypothese angenommen. Der Ablehnungsbereich liegt also auf der „rechten“ Seite, demnach handelt es sich um einen rechtsseitigen Hypothesentest.

Die Irrtumswahrscheinlichkeit ist mit 5 % vorgegeben. Ein Irrtum liegt dann vor, wenn sich der Bekanntheitsgrad des Produktes in der Bevölkerungsgruppe IV nach der Werbekampagne nicht verändert hat, obwohl das Ergebnis der Befragung das bestätigt (deutlich mehr als 30 der befragten Personen kennen das Produkt).

Gesucht wird also eine Anzahl k , welchen den Ablehnungsbereich der Nullhypothese p_0 definiert. Diese Anzahl k lässt sich mit Hilfe der gegebenen Irrtumswahrscheinlichkeit wie folgt berechnen:

$$P(X \geq k) = 0,05 \quad \text{Gegenereignis bilden}$$

$$1 - P(X \leq k - 1) = 0,05 \quad | -1 | : (-1)$$

$$P(X \leq k - 1) = 0,95$$

Verwende zum bestimmen der Anzahl k die Tabellen für die kumulierten Binomialverteilungen.
Hier ist $p = 0,3$ und $n = 100$, suche die Anzahl k bei der die Wahrscheinlichkeit $0,95$ beträgt.
Folgende Näherungswerte können für k gefunden werden:

$$P(X \leq 37) \approx 0,9470 < 0,95 \text{ und } P(X \leq 38) \approx 0,9660 > 0,95$$

Hier wird der größere der beiden Werte gewählt. Die gesuchte Anzahl k berechnest du nun wie folgt:

$$k - 1 = 38 \quad | +1$$

$$k = 39$$

⇒ Das Unternehmen sollte nur dann eine Sonderprämie an die Werbeagentur zahlen, wenn mindestens 39 der 100 befragten Personen der Gruppe IV angeben, dass sie das Produkt kennen. Das Risiko die Prämie fälschlicherweise an die Werbeagentur zu bezahlen, liegt nach deiner Entscheidungsregel bei 5%.