a) (1) ▶ **Bestimmen der Koordinaten von Punkt S** (7P)

Der Aufgabenstellung kannst du entnehmen, dass die Turmspitze S sich in 16 m Höhe über der quadratischen Grundfläche des Turms befindet. Möchtest du die Koordinaten von S bestimmen, so berechnest du zuerst die Koordinaten des Mittelpunkts M der quadratischen Grundfläche des Turms. Weil das Dach des Turms eine quadratische Pyramide ist, befindet sich die Turmspitze S direkt oberhalb des Mittelpunkts M der quadratischen Grundfläche.

Koordinaten der Turmspitze S

Koordinaten des Mittelpunkts M der Quadratischen Grundfläche:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Koordinaten von M sind $M\,(3 \mid 3 \mid 0)$. Die Turmspitze S liegt 16 m oberhalb der Turmspitze.

$\Longrightarrow$ Die Koordinaten der Turmspitze sind $S\,(3 \mid 3 \mid 16)$

(2) ▶ **Bestimmen der Koordinaten von Punkt E**

Der Aufgabenstellung kannst du entnehmen, dass der Eckpunkt E des Dachbodens auf der Geraden g und genau über dem Punkt A liegt. Da Punkt A im Koordinatenursprung liegt, befindet sich Eckpunkt E da, wo Gerade g die z - Achse schneidet. In Abhängigkeit von z besitzt E also diese Koordinaten:
$E(\,0 \mid 0 \mid z)$.

Koordinaten des Eckpunkts E

Setze die Geradengleichung von g mit $\overrightarrow{OE}$ (in Abhängigkeit von z) gleich und bestimme wie folgt die Koordinaten des Eckpunkts E:

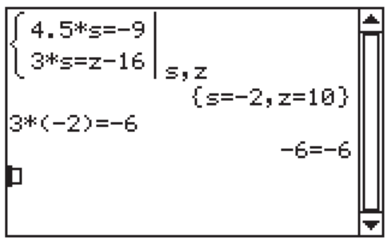
$$\overrightarrow{x_E} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 16 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4{,}5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4{,}5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -9 \\ z-16 \end{pmatrix}$$

Diese Gleichung kannst du mit deinem CAS lösen. Verwende dazu den Befehl für ein Gleichungssystem im Main-Modus deines CAS, welchen du hier findest:

`keyboard → 2D`.

Die obige Gleichung lässt sich in ein Gleichungssystem mit drei Gleichungen und zwei Variablen umwandeln.

Willst du dieses Gleichungssystem dann mit deinem CAS lösen, so trägst du in den Befehl für ein Gleichungssystem eine Gleichung, welche nur von s, und eine Gleichung, welche von z und s abhängt, ein. Verwende die übrige Gleichung dann dazu, um dein Ergebnis zu verifizieren (siehe rechts).



$\Longrightarrow$ Da $z = 10$ gilt, ergeben sich die Koordinaten von E zu: $E(0 \mid 0 \mid 10)$

(3) ▶ **Bestimmen der Koordinaten von *F*, *G* und *H***

Deine Aufgabe ist es hier, die Koordinaten der weiteren Eckpunkte F, G und H des Dachbodens zu bestimmen. Dabei kannst du der Aufgabenstellung entnehmen, dass Punkt F über B, Punkt G über C und Punkt H über D liegt. Die Punkte F, G und H liegen dabei jeweils in 10 m Höhe über den jeweiligen Punkte.

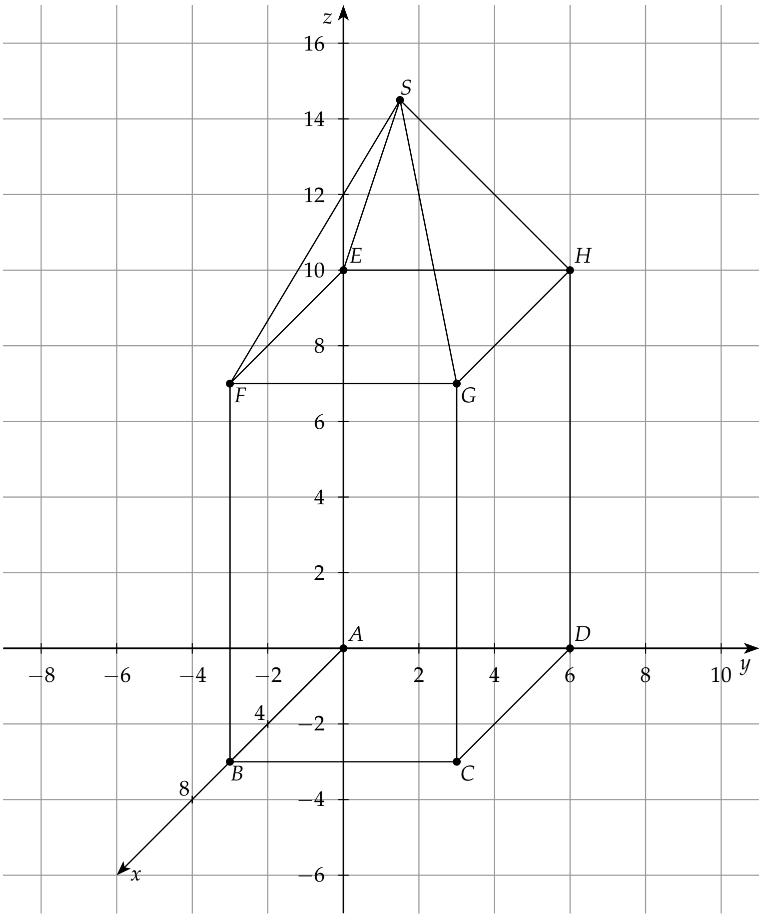
Es ergeben sich also diese Koordinaten:

$\Longrightarrow$ Punkt $F(6 \mid 0 \mid 10)$

$\Longrightarrow$ Punkt $G(6 \mid 6 \mid 10)$

$\Longrightarrow$ Punkt $H(0 \mid 6 \mid 10)$

(4) ▶ **Zeichnen des Turms**



b) (1) ▶ **Bestimmen einer Ebenengleichung der Ebenen E^* in Koordinatenform** (7P)

Die Normalform einer Ebenen in Koordinatenform ist:

$E^*: \; n_1 \cdot x + n_2 \cdot y + n_3 \cdot z = d$ mit:

- n_1, n_2 und n_3: Einträge des Normalenvektors $\overrightarrow{n}$,
- d: über Punktprobe zu bestimmende Konstante.

Deine Aufgabe ist es hier, eine Gleichung der Ebenen E^*, in welcher die Dachfläche GHS liegt, in Koordinatenform aufzustellen. Willst du mit Hilfe der Koordinaten der Punkte G, H und S eine Gleichung der Ebenen E^* in Koordinatenform bestimmen, so legst du im ersten Schritt zwei Richtungsvektoren der Ebenen E^* fest, zum Beispiel: $\overrightarrow{HG}$ und $\overrightarrow{HS}$.

Im zweiten Schritt bildest du mit $\overrightarrow{HG}$ und $\overrightarrow{HS}$ den Normalenvektor $\overrightarrow{n}$ der Ebenen E^*. Im dritten und letzten Schritt bestimmst du den Wert der Konstanten d über eine Punktprobe mit Punkt G, H oder S.

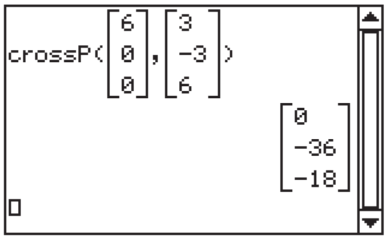
1. Schritt: Bilden der Richtungsvektoren der Ebenen E^*

Richtungsvektor $\overrightarrow{HG}$: $\overrightarrow{HG} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Richtungsvektor $\overrightarrow{HS}$: $\overrightarrow{HS} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 16 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$

2. Schritt: Bilden des Normalenvektors $\overrightarrow{n}$ der Ebenen E^*

Den Normalenvektor $\overrightarrow{n}$ der Ebenen E^* kannst du im Main-Modus deines CAS bestimmen. Verwende dazu dort den `crossp`-Befehl, um das Vektorprodukt der Richtungsvektoren $\overrightarrow{HG}$ und $\overrightarrow{HS}$ zu berechnen. Trage diese Vektoren getrennt durch ein Komma in die Befehlsklammer ein und berechne das Vektorprodukt dieser, wie im Schaubild rechts zu sehen ist.



Da beim Normalenvektor $\overrightarrow{n}$ nur die Richtung und nicht die Länge entscheidend ist, ist folgende Umformung hier zulässig:

$$\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ -36 \\ -18 \end{pmatrix} \widehat{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. Schritt: Bestimmen der Konstanten d der Ebenengleichung von E^*

Einsetzen von $G(6 \mid 6 \mid 10)$ in die von d abhängige Ebenengleichung von E^* in Koordinatenform:

$2 \cdot 6 + 1 \cdot 10 = d \;\Leftrightarrow\; d = 22$

$\Longrightarrow$ Eine Ebenengleichung der Ebenen E^* in Koordinatenform ist also:

$E^* : 2 \cdot y + 1 \cdot z = 22.$

(2) ▶ **Bestimmen der Koordinaten von P**

Der Aufgabenstellung kannst du entnehmen, dass Gerade g Ebene E^* im Punkt P durchstößt. Willst du die Koordinaten von P berechnen, so formst du Gerade g zuerst als einen von s abhängigen Vektor um und setzt diesen anschließend für x, y und z in die Ebenengleichung von E^* in Koordinatenform ein. Hast du anschließend den Parameterwert für s bestimmt, für welche sich E^* und g schneiden, so setzt du diesen in die Geradengleichung von g ein und berechnest somit den zu P zugehörigen Ortsvektor.

1. Schritt:

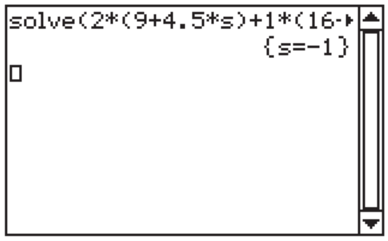
$$g: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 16 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4,5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 16 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \cdot s \\ 4,5 \cdot s \\ 3 \cdot s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 + 3 \cdot s \\ 9 + 4,5 \cdot s \\ 16 + 3 \cdot s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_g \\ y_g \\ z_g \end{pmatrix}$$

2. Schritt:

$$2 \cdot y_g + 1 \cdot z_g = 22$$
$$2 \cdot (9 + 4,5 \cdot s) + 1 \cdot (16 + 3 \cdot s) = 22$$

Löse diese Gleichung wie rechts über den `solve`-Befehl im Main-Modus deines CAS.

Mit dem CAS ergibt sich: $s = -1$.



3. Schritt:

$$\overrightarrow{x_P} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 16 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4,5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4,5 \\ 13 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$ Die Koordinaten von P sind: $P(3 \mid 4,5 \mid 13)$.

(3) ▶ **Berechnen des gesuchten Abstands**

An der Dachfläche GHS soll eine Hebevorrichtung angebracht werden, dazu wird im Punkt P mit den Koordinaten $P(3 \mid 4,5 \mid 13)$ ein Balken insgesamt $2 \cdot \sqrt{5}\,\text{m}$ durch die Dachfläche hindurchgeführt. An dessen Spitze soll wiederum eine Rolle befestigt werden, über welche ein Seil läuft.

Deine Aufgabe ist es hier, den Abstand zu berechnen, welchen dieses Seil zur Turmwand $CDHG$ besitzt.

Bevor du jedoch den gesuchten Abstand berechnen kannst, bestimmst zu zuerst die Koordinaten des Punktes Q, an welchem das Seil über die Rolle geführt wird. Hast du die Koordinaten von Q bestimmt, so kannst du den Abstand des Seiles zur Turmwand $CDHG$ mit Hilfe der Koordinaten von Q bestimmen.

1. Schritt: Berechnen der Koordinaten des Punktes Q

Aus der Aufgabenstellung sollte dir bekannt sein, dass der Balken, welcher durch die Dachfläche GHS geführt wird, senkrecht zu dieser steht, die Dachfläche GHS wird dabei durch die Ebene E^* beschrieben. Willst du nun Punkt Q bestimmen, an welchem das Seil über die Rolle geführt wird, so definierst du dir eine Gerade j, welche $\overrightarrow{OP}$ als Stützvektor und den Normalenvektor $\overrightarrow{n_E}$ als Richtungsvektor besitzt.

Hast du diese Gerade j bestimmt, so kannst du die Koordinaten von Q berechnen. Dazu sollte dir bekannt sein, dass der gesuchte Punkt Q und der Punkt P auf der Geraden j liegen. Des Weiteren soll der Punkt Q einen Abstand von $2 \cdot \sqrt{5}\,\text{m}$ zum Punkt P besitzen. Da Gerade j den Ortsvektor $\overrightarrow{OP}$ des Punktes P als Aufpunkt besitzt, kannst du die Koordinaten von Punkt Q bestimmen, indem du ein Vielfaches des Richtungsvektors $\overrightarrow{n}$ so bestimmst, dass dieses Vielfache eine Länge von $2 \cdot \sqrt{5}$ besitzt.

Hast du diesen verlängerten Vektor $\overrightarrow{n_1}$ bestimmt, so addierst du diesen zum Ortsvektor $\overrightarrow{OP}$ des Punktes P und erhältst so die Koordinaten von Punkt Q.

Gleichung der Geraden j

Normalenvektor $\overrightarrow{n}$ der Ebenen E^*: $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Gleichung der Geraden j:

$$j: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4,5 \\ 13 \end{pmatrix} + r \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vielfaches das Vektor $\overrightarrow{n_E}$ bestimmen

Bestimme zunächst die Länge des Vektors $\overrightarrow{n}$ der Geraden j. Hast du diese Länge $|\overrightarrow{n}|$ bestimmt, so bestimmst du einen beliebigen Parameter $k \in \mathbb{R}$ so, dass $k \cdot |\overrightarrow{n_E}|$ mit $2 \cdot \sqrt{5}$ übereinstimmt. Mit diesem Parameter k kannst du dann das gesuchte Vielfache des Vektors $\overrightarrow{n_E}$ bzw. den oben beschriebenen Vektor $\overrightarrow{n_1}$ bestimmen.

$$|\overrightarrow{n}| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{0^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{5}.$$

Einsetzen von $|\overrightarrow{n}| = \sqrt{5}$ in oben beschriebenen Zusammenhang:

$k \cdot |\overrightarrow{n}| = 2 \cdot \sqrt{5} \;\Leftrightarrow\; k \cdot \sqrt{5} = 2 \cdot \sqrt{5} \;\Leftrightarrow\; k = 2.$

Das gesuchte Vielfache des Vektors $\overrightarrow{n}$ ist also:

$$\overrightarrow{n_1} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Koordinaten des Punktes Q

$$\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4,5 \\ 13 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8,5 \\ 15 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad Q(3\,|\,8,5\,|\,15)$$

Alternativ: Einsetzen des normierten Normalenvektors $\overrightarrow{n_E}$

Auch hier definierst du dir zunächst eine Gerade j'. Diese Gerade j' besitzt als Stützvektor wieder den Ortsvektor $\overrightarrow{OP}$ des Punktes P und als Richtungsvektor verwendest du nun den normierten Normalenvektor $\overrightarrow{n_E}$ der Ebene E^*.

Hast du diese Gerade j' bestimmt, so berechnest du die Koordinaten von Q, indem du die Länge $l = 2 \cdot \sqrt{5}$ des Balkens als Parameterwert in die Gerade j' einsetzt.

Gleichung der Geraden j'

Normierter Normalenvektor $\overrightarrow{n_E}$ der Ebene E^*:

$$\overrightarrow{n_E} = \frac{1}{|\overrightarrow{n_E}|} = \frac{1}{\sqrt{0^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Gleichung der Geraden j':

$$j': \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4,5 \\ 13 \end{pmatrix} + r \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Koordinaten des Punktes Q :

$$\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4,5 \\ 13 \end{pmatrix} + 2 \cdot \sqrt{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4,5 \\ 13 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8,5 \\ 15 \end{pmatrix} \Rightarrow Q(3 \,|\, 8,5 \,|\, 15)$$

2. Schritt: Berechnen des Abstands des Seils zur Turmwand $CDHG$

Alle Punkte der Seitenwand $CDHG$ haben eine y - Koordinate von $y_{CDHG} = 6$. Der Punkt Q wiederum hat eine y - Koordinate von $y_Q = 8,5$.

Der Abstand zwischen Seil und Wand ist also:
$|y_{CDHG} - y_Q| = |6 - 8,5| = 2,5\,\text{m}$.

c) ▶ **Berechnen des gesuchten Winkels** (4P)

Der Aufgabenstellung kannst du entnehmen, dass der Balken, über welchen das Seil geführt wird, an einem Träger befestigt wird, welcher wiederum an der Dachfläche EFS angebracht ist. Deine Aufgabe ist es hier, jenen Winkel zu berechnen, welchen die Dachfläche EFS und der Balken, über welchen das Seil läuft, einschließen.

Die Richtung des Balkens hast du dabei im vorherigen Aufgabenteil modelliert. Diese wird durch Gerade j dargestellt:

$$j: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4,5 \\ 13 \end{pmatrix} + r \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrel{\widehat{=}} \begin{pmatrix} 3 \\ 4,5 \\ 13 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Diesen Winkel α berechnest du hier über diese Formel:
$\sin\alpha = \dfrac{|\overrightarrow{n} \circ \overrightarrow{u}|}{|\overrightarrow{n}| \cdot |\overrightarrow{u}|}$ mit:

- $\overrightarrow{n}$: Normalenvektor der Dachebene EFS.
- $\overrightarrow{u}$: Richtungsvektor der Geraden j.

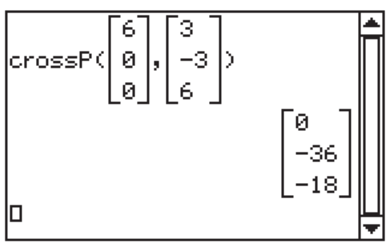
1. Schritt: Bestimmen des Normalenvektors der Dachebenen EFS

Die Richtungsvektoren kannst du mit den Koordinaten der Punkte E, F und S bestimmen:

$$\overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\overrightarrow{ES} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 16 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Bestimme auch hier wieder den Normalenvektor $\overrightarrow{n}$ im Main-Modus deines CAS. Bilde dazu auch hier wieder das Vektorprodukt der Richtungsvektoren $\overrightarrow{EF}$ und $\overrightarrow{ES}$ mit dem `crossp`-Befehl deines CAS. Wende den Befehl wie im Schaubild rechts auf die Vektoren $\overrightarrow{EF}$ und $\overrightarrow{ES}$ an.



Da beim Normalenvektor $\overrightarrow{n}$ nicht die Länge sondern nur die Richtung entscheidend ist, ist folgende Umformung hier zulässig:

$$\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ -36 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

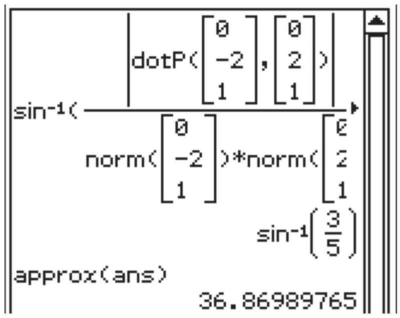
Der Normalenvektor der Ebenen EFS ergibt sich also zu: $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. Schritt: Berechnen des Winkels zwischen der Dachebene *EFS* und dem Balken

Setze $\overrightarrow{n}$ und $\overrightarrow{u}$ in die oben aufgestellte Formel für den Winkel α ein, um diesen zu berechnen:

$$\sin\alpha = \frac{|\overrightarrow{n} \circ \overrightarrow{u}|}{|\overrightarrow{n}| \cdot |\overrightarrow{u}|} \Leftrightarrow \alpha = \sin^{-1}\left(\frac{|\overrightarrow{n} \circ \overrightarrow{u}|}{|\overrightarrow{n}| \cdot |\overrightarrow{u}|}\right)$$

Berechne den Winkel α im Main-Modus deines CAS. Die auftretenden Beträge berechnest du dabei mit dem `norm`-Befehl und das auftretende Skalarprodukt berechnest du mit dem `dotP`-Befehl, in welchen du die betreffenden Vektoren, getrennt durch ein Komma, eintragen musst (siehe Schaubild unten). Achte darauf, dass du dein Computer-Algebra-System nicht auf „Bogenmaß“ sondern auf „Gradmaß“ eingestellt hast.



$\Longrightarrow$ Der Winkel zwischen Dachfläche und Balken ist $36,9\,°$.

d) (1) ▶ **Zeigen, dass Kante $\overline{BC}$ in jeder Ebenen der Schar E_a liegt** (8P)

Der Aufgabenstellung kannst du entnehmen, dass sich an der Turmseite $BCFG$ eine Zugbrücke befindet, welche drehbar um die Kante $\overline{BC}$ ist. Deine Aufgabe ist es hier zu zeigen, dass die Kante $\overline{BC}$ in jeder Ebenen der Schar $E_a : a \cdot x - z = 6 \cdot a$ liegt.

Willst du zeigen, dass die Kante $\overline{BC}$ in jeder Ebenen der Schar E_a liegt, so setzt du die Koordinaten von Punkt B und Punkt C in die Ebenengleichung von E_a in Koordinatenform ein. Anschließend beweist du, dass Punkt B und C in den Ebenen E_a liegen und dass die resultierende wahre Aussagen unabhängig von Parameter a sind, was bedeutet, dass die Kante $\overline{BC}$ in jeder Ebenen der Schar E_a liegt.

Zeigen, dass Punkt *B* in jeder Ebenen der Schar E_a liegt

Einsetzen von $B(6\,|\,0\,|\,0)$ in $E_a : a \cdot x - z = 6 \cdot a$:

$a \cdot 6 - 0 = 6 \cdot a \;\Leftrightarrow\; 6 \cdot a = 6 \cdot a \;\Leftrightarrow\; 6 = 6.$

Da das Einsetzen der Koordinaten von Punkt B in E_a zu einer wahren Aussage führt, hast du gezeigt, dass Punkt B in jeder Ebenen der Schar E_a liegt.

Zeigen, dass Punkt C in jeder Ebenen der Schar E_a liegt

Einsetzen von $B(6\,|\,6\,|\,0)$ in $E_a : a \cdot x - z = 6 \cdot a$:

$a \cdot 6 - 0 = 6 \cdot a \;\Leftrightarrow\; 6 \cdot a = 6 \cdot a \;\Leftrightarrow\; 6 = 6.$

Da das Einsetzen der Koordinaten von Punkt C in E_a ebenfalls zu einer wahren Aussage führt, hast du gezeigt, dass Kante $\overline{BC}$ in jeder Ebenen der Schar E_a liegt.

(2) ▶ **Untersuchen, ob die Zugbrücke in einer Ebene E_a liegt, wenn sie geschlossen ist**

Deine Aufgabe ist es nun zu überprüfen, ob die Zugbrücke in einer Ebenen E_a liegt, wenn diese vollständige geschlossen ist. Da sich die Zugbrücke um die Kante $\overline{BC}$ bewegt, liegt diese, wenn sie vollständig geschlossen ist, in der Ebenen $BCGF$. Das bedeutet, dass die äußeren Kanten der Zugbrücke entlang der Vektoren $\overrightarrow{BF}$ und $\overrightarrow{CG}$ verlaufen müssen (siehe Skizze Aufgabenteil a).

Willst du also überprüfen, ob die Zugbrücke im geschlossenen Zustand in einer Ebenen E_a liegt, so überprüfst du, ob die Punkte B, F, C und G in einer der Ebenen E_a liegen. Da du oben schon gezeigt hast, dass die Punkte B und C in allen Ebenen der Ebenenschar E_a liegen, musst du nun nur noch überprüfen, ob es einen Parameterwert für a gibt, sodass die Punkte F und G in einer gemeinsamen Ebenen der Schar E_a liegen.

Überprüfen, ob der Punkt F in einer Ebenen der Schar E_a liegt

Einsetzen von $F(6\,|\,0\,|\,10)$ in $E_a : a \cdot x - z = 6 \cdot a$:

$a \cdot 6 - 10 = 6 \cdot a \;\Leftrightarrow\; -10 = 6 \cdot a - 6 \cdot a \;\Leftrightarrow\; -10 = 0.$

$\Longrightarrow$ Da das Einsetzen der Koordinaten des Punktes F zu einer falschen Aussage führt, liegt die Zugbrücke im geschlossenen Zustand in keiner der Ebenen E_a. Das Überprüfen der Koordinaten des Punktes G kann hier entfallen, da beide Punkte in einer gemeinsamen Ebene liegen müssen, damit die Zugbrücke im geschlossenen Zustand in einer der Ebenen E_a liegt.

(3) ▶ **Bestimmen des gesuchten Parameterwerts für a**

Im letzten Aufgabenteil dieser Aufgabe sollst du den Parameterwert für a der Ebene E_a bestimmen, in welcher die Zugbrücke liegt, wenn sie mit der Turmwand einen Winkel von $\alpha = 30^\circ$ bildet. Die Turmwand wird durch die Seitenfläche $BCGF$ repräsentiert (siehe Skizze Aufgabenteil a), wobei Seitenfläche $BCGF$ als eine Ebene E_{BCGF} aufgefasst werden kann. a soll also so bestimmt werden, dass Ebene E_a mit der Ebenen E_{BCGF} einen Winkel von 30° einschließt.

Allgemein berechnest du den Schnittwinkel α zwischen zwei Ebenen über diesen Ansatz:

$\cos(\alpha) = \dfrac{\overrightarrow{n_1} \circ \overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}| \cdot |\overrightarrow{n_2}|}$ mit:

- $\overrightarrow{n_1}$ und $\overrightarrow{n_2}$: Normalenvektoren der betrachteten Ebenen,
- α: Schnittwinkel.

Bestimme also im ersten Schritt die Normalenvektoren $\overrightarrow{n_{E_a}}$ und $\overrightarrow{n_{E_{BCGF}}}$ der Ebenen E_a und E_{BCGF}, um diese im zweiten Schritt in den oben aufgestellten Ansatz für den Schnittwinkel α einzusetzen. Hast du diese dort eingesetzt, so setzt du $\alpha = 30°$ in den Ansatz ein und löst die resultierende Gleichung nach Parameter a mit deinem CAS.

1. Schritt: Bestimmen der Normalenvektoren $\overrightarrow{n_{E_a}}$ und $\overrightarrow{n_{E_{BCGF}}}$

Der gegebenen Ebenengleichung der Ebenenschar E_a kannst du sofort die Einträge des zugehörigen Normalenvektors $\overrightarrow{n_{E_a}}$ entnehmen. Dieser ergibt sich zu:

$$\overrightarrow{n_{E_a}} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Der Skizze des behandelten Sachverhalts im Aufgabenteil a kannst du entnehmen, dass in der Ebenen E_{BCGF} der Seitenfläche $BCGF$ jeder Punkt liegt, welcher eine Koordinate x-Koordinate von $x = 6$ besitzt. Des Weiteren kannst du erkennen, dass die Ebene E_{BCGF} parallel zu yz-Ebenen verläuft. Eine Ebenengleichung der Ebenen E_{BCGF} in Koordinaten lautet also: $E_{BCGF} : x = 6$.

Auch dieser Gleichung kannst du sofort die Einträge des zugehörigen Normalenvektors $\overrightarrow{n_{E_{BCGF}}}$ entnehmen, dieser ergibt sich zu:

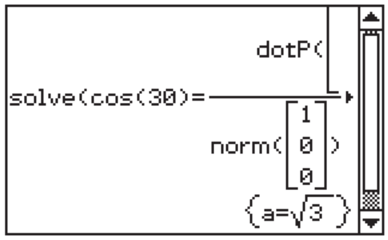
$$\overrightarrow{n_{E_{BCGF}}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. Schritt: Bestimmen des gesuchten Parameterwerts für a

Setzt du nun $\overrightarrow{n_{E_a}}$, $\overrightarrow{n_{E_{BCGF}}}$ und $\alpha = 30°$ in den oben aufgestellten Ansatz für den Schnittwinkel der Ebenen E_a und E_{BCGF}, so resultiert diese Gleichung:

$$\cos(30°) = \frac{\overrightarrow{n_{E_a}} \circ \overrightarrow{n_{E_{BCGF}}}}{|\overrightarrow{n_{E_a}}| \cdot |\overrightarrow{n_{E_{BCGF}}}|} = \frac{\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right|}.$$

Löse diese Gleichung wie oben schon im Main-Modus deines CAS, verwende dazu wieder den `solve`-Befehl. Das auftretende Skalarprodukt und die auftretende Beträge berechnest du hier wieder mit dem `dotP`- bzw. mit dem `norm`-Befehl. Übertrage die obige Gleichung wie rechts in dein CAS und vergiss nicht, diesen auf das Grad-Maß einzustellen.



Mit dem CAS ergibt sich: $a = \sqrt{3}$.

$\Longrightarrow$ Die Zugbrücke liegt also in der Ebene $E_{\sqrt{3}}$, mit
$E_{1,732}: \sqrt{3} \cdot x - z = 6 \cdot \sqrt{3}$,
wenn diese mit der Turmwand einen Winkel von 30° einschließt.

e) ▶ **Berechnen des Abstands der Person von der Seitenfläche $BCGF$** (4P)

An der Turmspitze S wird ein Windrichtungsmesser angebracht, dessen Spitze 0,7 m über S liegt, das heißt, die Spitze des Windrichtungsmesser besitzt diese Koordinaten:
$W(3\,|\,3\,|\,16,7)$.

Eine Person, deren Augenhöhe 1,50 m ist, steht auf dem Boden vor der Seitenfläche $BCGF$ des Turms und kann die Spitze W des Windrichtungsmesser gerade noch sehen. Deine Aufgabe ist es nun, den Abstand dieser Person von der Seitenfläche $BCGF$ zu berechnen.

Beim Lösen dieser Aufgabe gibt es zwei Möglichkeiten. Im folgenden werden beide vorgestellt:

1. Möglichkeit:

Ist die Spitze des Windrichtungsmesser bei $W(3\,|\,3\,|\,16,7)$ vom Boden aus vor der Seitenfläche $BCGF$ des Turmes gerade noch zu sehen, so verläuft der Blick der Person gerade so über die obere Kante $\overline{FG}$ der Seitenfläche $BCFG$. Das heißt, der Blick der Person verläuft auf einer Geraden h, welche durch Punkt W und durch einen beliebigen Punkt auf der Kante $\overline{FG}$ verläuft. Hier wird angenommen, dass Gerade h, durch die Mitte $M_{\overline{FG}}$ der Kante $\overline{FG}$ verläuft.

Willst du berechnen, in welchem Abstand die Person vor der Seitenfläche $BCGF$ steht, so bestimmst du zuerst die Koordinaten der Position P der Person im Koordinatensystem. Dabei geht aus der Aufgabenstellung hervor, dass von einer Augenhöhe von 1,5 m der Person ausgegangen wird. Willst du also die Koordinaten der Position P der Person im Koordinatensystem bestimmen, so ermittelst du den Punkt auf der Geraden h der Blickrichtung welcher eine z - Koordinate von $z = 1,5$.

Hast du die Koordinaten von P ermittelt, so kannst du über die Differenz der x - Koordinaten den Abstand der Person zur Turmwand $BCGF$ berechnen.

(1) Gerade h der Blickrichtung der Person

Mitte der Kante $\overline{FG}$:

$$\overrightarrow{OM_{\overline{FG}}} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OF} + \overrightarrow{OG}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Stützvektor von h: $\overrightarrow{OW} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 16,7 \end{pmatrix}$.

Richtungsvektor von h: $\overrightarrow{WM_{\overline{FG}}} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 16,7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -6,7 \end{pmatrix}$.

$$\Longrightarrow \quad h: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 16,7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -6,7 \end{pmatrix}.$$

(2) Koordinaten des Punktes *P*

Die z - Koordinaten aller Punkte auf der Geraden h werden durch folgende Gleichung bestimmt:
$z = 16,7 + t \cdot (-6,7)$.

Setze diese Gleichung mit $z = 1,5$ gleich, um den zu P zugehörigen Parameterwert von t zu bestimmen:

$1,5 = 16,7 + t \cdot (-6,7) \;\Leftrightarrow\; -15,2 = -6,7 \cdot t \;\Leftrightarrow\; t = 2,269$.

Koordinaten von Punkt P:

$$\overrightarrow{x_P} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 16,7 \end{pmatrix} + 2,269 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -6,7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9,807 \\ 3 \\ 1,5 \end{pmatrix} \Longrightarrow P(9,807\,|\,3\,|\,1,5).$$

(3) Abstand der Person zur Seitenfläche *BCGF* des Turms

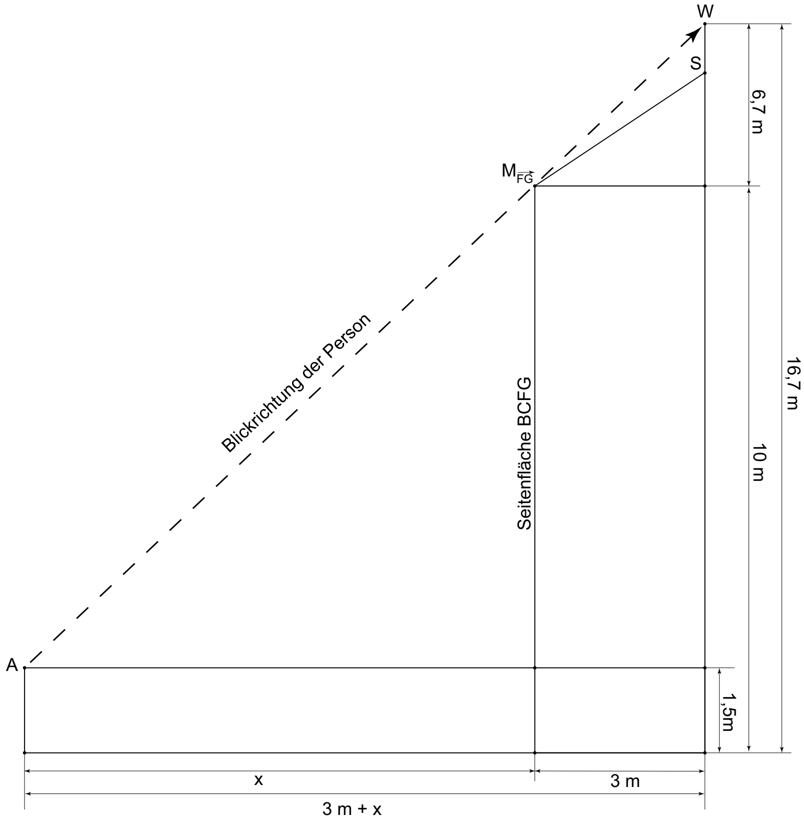
Berechne den Abstand d der Person zur Seitenfläche $BCGF$ des Turms über die Differenz der x - Koordinaten von P und der Seitenfläche:

$d = |x_P - x_{BCGF}| = |9,807 - 6| = 3,81\,\text{m}$.

$\Longrightarrow$ Der Abstand zwischen Person und der Seitenfläche $BCGF$ des Turms ist 3,81 m.

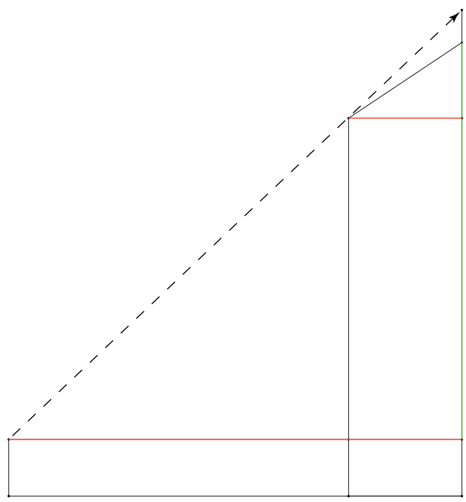
2. Möglichkeit: Strahlensatz

Skizzierst du den gegebenen Sachverhalt in der Seitenansicht, so entsteht diese Skizze:



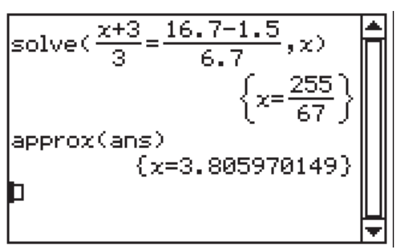
x: gesuchter Abstand zum Turm
A: Auge der Person

Wie du erkennen kannst, bildet die Seitenansicht des beschriebenen Sachverhalts eine Figur, in welcher ein Strahlensatz anwendbar ist. Zu bestimmen ist hier die Länge x, welche den Abstand der Person vom Turm repräsentiert.
Willst du x bestimmen, so wendest du mit diesen Seiten den Strahlensatz in der Figur an (siehe rechts). Die Länge von x berechnest du, indem du die markierten waagrechten Seiten mit den senkrechten Seiten wie folgt in Relation setzt:



$$\frac{x+3\,\text{m}}{3\,\text{m}} = \frac{16{,}7\,\text{m} - 1{,}5\,\text{m}}{6{,}7\,\text{m}} \qquad | \cdot 3\,\text{m}$$

Lösen über CAS (`solve`-Befehl) ergibt:



$\Longrightarrow$ Der Abstand zwischen Person und der Seitenfläche $BCGF$ des Turms ist ungefähr 3,81 m.