a)

▶ Geradengleichung der Flugbahn angeben

Bei dieser Aufgabe fliegt ein Bussard im Sturzflug auf eine Maus zu.

Die Koordinaten des Startpunktes sowie der Richtungsvektor sind gegeben:

- Startpunkt: $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 30 \\ -4 \\ 36 \end{pmatrix}$
- Richtungsvektor: $\overrightarrow{RV} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

Damit kannst du eine Geradengleichung aufstellen, welche die Flugbahn des Bussards beschreibt.

$$\boxed{\boldsymbol{g: \quad \vec{x} = \overrightarrow{a} + r \cdot \overrightarrow{rv}}}$$

Du kannst die Koordinaten des Stützvektors $\overrightarrow{a}$ von A ablesen. Dieser bildet mit dem Richtungsvektor $\overrightarrow{rv}$ die Gerade g.

▶ Koordinaten von *M* angeben

M stellt den Standort der Maus dar, den der Bussard im Sturzflug anvisiert.

Er stellt also den **Schnittpunkt der Geraden g mit der x-y-Ebene** dar. Diese hat die Gleichung $\boldsymbol{z = 0}$.

Den Schnittpunkt berechnest du, indem du die Zeilen der Geraden in die Koordinatengleichung der x-y-Ebene einsetzt.

Dadurch erhältst du den Parameter r, den du wiederum in die Gleichung von g einsetzen kannst, um den Schnittpunkt M zu erhalten.

▶ Bestimmen der Fluggeschwindigkeit

Nun soll die Geschwindigkeit v des Bussards in $\frac{km}{h}$ berechnet werden.

$$\boxed{\boldsymbol{v = \frac{\text{Weg}}{\text{Zeit}} = \frac{s}{t}}}$$

Berechne dazu zunächst den Betrag des Weges, des Verbindungsvektors $\overrightarrow{AM}$, um die Formel verwenden zu können.

$$\boxed{\boldsymbol{|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}}$$

Die Geschwindigkeit muss dann noch in die richtige Einheit umgerechnet werden:

$$\boxed{\boldsymbol{1\frac{m}{sec} = 3,6\frac{km}{h}}}$$

Der Weg, den der Bussard in 12 sec zurücklegt stellt den **Betrag des Verbindungsvektors** $\overrightarrow{AM}$ dar.

b)

▶ Koordinatengleichung der Flugebene des Vogelschwarms angeben

Ein Vogelschwarm fliegt in einer Ebene E, die durch folgende Punkte aufgespannt wird:

$B(40\,|\,46\,|\,20)$

$C(36\,|\,26\,|\,22)$

$D(44\,|\,42\,|\,20)$

Du sollst eine Koordinatengleichung dieser Ebene angeben.

Diese hat die allgemeine Form $\boxed{\boldsymbol{n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = d}}$.

Um den Normalenvektor $\overrightarrow{n}$ der Ebene zu bestimmen, benötigst du zwei Vektoren, die in der Ebene liegen und verschieden sind. Du kannst beispielsweise $\overrightarrow{BC}$ und $\overrightarrow{BD}$ verwenden.

Den Normalenvektor berechnest du aus dem **Vektorprodukt** dieser zwei Vektoren.

Setze den Normalenvektor $\overrightarrow{n}$ in die allgemeine Koordinatengleichung ein.

Anschließend kannst du den Parameter d bestimmen, indem du die Koordinaten $x_{1,2,3}$ eines Punktes, der in der Ebene liegt, in die Gleichung einsetzt.

▶ Schnittpunkt mit Flugebene des Vogelschwarms bestimmen

Ein Vogelschwarm fliegt in der Ebene E mit der Gleichung $E:\; x+y+12z=326$, die vom Bussard durchflogen wird.

Du sollst den **Schnittpunkt der Geraden *g* mit der Ebenen *E*** berechnen.

Setze dazu im **1. Schritt** die Geradengleichung zu g zeilenweise in die Koordinatengleichung zu E ein und löse nach dem Parameter r auf, um diesen zu bestimmen.

Damit kann im **2. Schritt** der Schnittpunkt S berechnet werden, indem du ***r* in die Geradengleichung zu *g*** einsetzt.

▶ Schnittwinkel berechnen

Nun soll der Winkel zwischen der Geraden g und der Ebene E bestimmt werden.

Dazu kannst du folgende Formel verwenden:

$$\boxed{\sin\alpha = \frac{|\overrightarrow{rv}\circ\vec{n}|}{|\overrightarrow{rv}|\cdot|\vec{n}|}}$$

- $\overrightarrow{rv}$: Richtungsvektor der Geraden
- $\vec{n}$: Normalenvektor der Ebene E

c)

▶ Nachweisen, dass Flugzeug nicht auf Zugvögel treffen kann

Ein Flugzeug fliegt entlang der Geraden $f:\; \vec{x} = \begin{pmatrix}50\\75\\24\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-2\\-4\\0,5\end{pmatrix}$.

Du sollst nun nachweisen, dass sich f und E nicht schneiden.

Setze wie im Aufgabenteil b) die Geradengleichung zeilenweise in die Ebenengleichung von

E ein und löse nach dem Parameter t auf.

Erhältst du einen Wert für den Parameter t, so existiert ein Schnittpunkt zwischen der Geraden f und der Ebene E. Das würde bedeuten, dass das Flugzeug den Zugvogelschwarm durchfliegt.
Findest du jedoch kein t, so liegt **kein Schnittpunkt** vor und du hast die Aussage aus dem Aufgabentext nachgewiesen.

▶ Abstand zwischen f und E berechnen

Anschließend soll der **Abstand zwischen f und E** berechnet werden.

Eine Ebene und eine Gerade können drei unterschiedliche Lagebeziehungen im dreidimensionalen Raum einnehmen:

- Echte Parallelität: Die Gerade verläuft **parallel** zur Ebene und hat keinen Schnittpunkt mit dieser.
- Identisch: Die Gerade ist in der Ebene **enthalten**. Sie haben folglich unendlich viele Schnittpunkte.
- Schnittpunkt: Die Gerade schneidet die Ebene in **einem** Punkt.

Zuvor hast du nachgewiesen, dass die Gerade und die Ebene E keinen Schnittpunkt besitzen. Du kannst also festhalten, dass die Gerade **parallel** zur Ebene verläuft. Damit hat jeder Punkt den gleichen Abstand zur Ebene E.

Um den Abstand zu bestimmen, kannst du hier eine abgewandelte Form der **Hesse'sche Normalenform** verwenden:

$$\boxed{\text{HNF:}\quad \boldsymbol{d} = \left|\frac{\boldsymbol{n_1x_1+n_2x_2+n_3x_3-b}}{|\vec{\boldsymbol{n}}|}\right|}$$

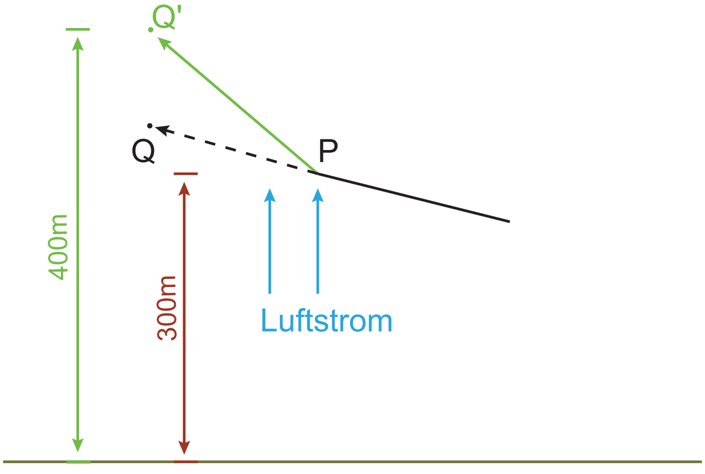
Da du die Ebenengleichung in Koordinatenform gegeben hast, kannst du diese hier einsetzen.

Für $x_{1,2,3}$ setzt du anschließend einen beliebigen Punkt auf der Geraden f ein und berechnest d.

d)

▶ Wert z finden

Bei dieser Aufgabe wird ein Vogel durch einen Luftstrom von seiner eigentlichen Flugbahn abgelenkt und überfliegt einen ursprünglich angepeilten Punkt Q nun 400 m über dem Boden.



Anhand der z-Koordinate von $Q(22\,|\,-56\,|\,30)$ kannst du erkennen, dass der Vogel eigentlich 30 LE, also 300 m über dem Boden hätte ankommen müssen.

Beim neuen Punkt Q' muss also nur die z-Koordinate geändert werden.

In der Aufgabenstellung wird genannt, dass der Vogel den Punkt Q in einer Höhe von 400 m über dem Boden überfliegt. Es wird also lediglich die z-Koordinate auf 40 LE erhöht. Du kannst die Koordinaten des neuen Punktes Q' angeben mit: $Q'(22\,|\,-56\,|\,40)$.

Der Verbindungsvektor $\overrightarrow{PQ'}$ beschreibt den **neuen Richtungsvektor** der Flugbahn.

Du sollst nun herausfinden, wie der Parameter z zu wählen ist, damit der Vogel durch die Flugbahnänderung den Punkt Q' erreicht.