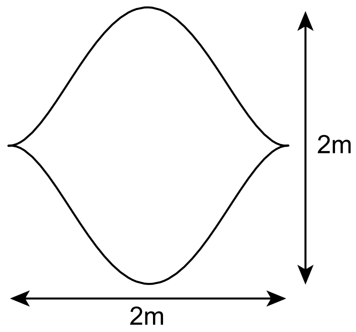
Das Designerbüro PolyNom hat einem Kunden die nebenstehende Abbildung als Entwurf für ein Firmenlogo vorgelegt.
Der obere Rand des Logos soll durch eine ganzrationale Funktion f mit $f(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^2 + c$, $a \neq 0$, beschrieben werden.
Der untere Rand des Logos soll durch eine Funktion g beschrieben werden, deren Graph durch Spiegelung des Graphen von f an der x-Achse entsteht.
Die Graphen von f und g sind in dem Koordinatensystem der Anlage 1 dargestellt.



a) Begründen Sie anhand des Funktionsterms, dass der Graph der Funktion f symmetrisch zur y-Achse ist. (11P)

Die Steigung des Graphen von f in den Punkten A und B soll jeweils den Wert null haben.

Ermitteln Sie eine Gleichung der Funktion f.

(Kontrollergebnis: $f(x) = x^4 - 2 \cdot x^2 + 1$)

Geben Sie eine Gleichung der Funktion g an.

b) Der Kunde fordert für das durch f und g beschriebene Logo: (10P)

- Die Materialkosten für ein Logo sollen bei einem Preis von 34 € je Quadratmeter 75 € nicht überschreiten.
- Die größte Steigung des oberen Randes soll mindestens 1,5 betragen.

Untersuchen Sie für jede Forderung, ob sie erfüllt wird.

c) Das Logo soll verschiedenfarbig gestaltet werden. Dazu wird es durch die Geraden g_1 und g_2 mit $g_1(x) = x$ und $g_2(x) = -x$ in vier Flächenstücke unterteilt. (13P)

Zeichnen Sie diese Geraden in das Koordinatensystem der Anlage.

Bestimmen Sie die Inhalte der einzelnen Flächenstücke.

Ein anderer Vorschlag sieht vor, das Logo durch Ursprungsgeraden zu unterteilen, die durch die Wendepunkte von f verlaufen.

Bestimmen Sie die Gleichungen dieser Geraden.

d) Unabhängig vom Sachzusammenhang ist die Funktionenschar f_k gegeben mit (10P)
$f_k(x) = k \cdot x^4 - 2 \cdot x^2 + 1, \quad x > 0, k > 0.$

Ohne Nachweis können Sie verwenden, dass jeder Graph der Schar für $x > 0$ einen Wendepunkt und einen Tiefpunkt besitzt.

Zeigen Sie damit, dass für jeden Wert von k mit $k > 0$ die x-Koordinate des Wendepunktes immer dasselbe Vielfache der x-Koordinate des Tiefpunktes ist.

Dokumentieren Sie hierzu einen Lösungsweg, der ohne den Einsatz des Rechners nachvollziehbar ist.

(44P)

Material

Anlage : Graphen zu den Teilaufgaben a), b) und c)