a) **▶ G_a auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen untersuchen** (5P)

Wir betrachten im ersten Schritt die Schnittpunkte mit der x-Achse und im zweiten Schritt die Schnittpunkte mit der y-Achse.

1. Schritt: Schnittpunkte mit der x-Achse berechnen

Setze $f_a(x) = 0$ und löse die Gleichung nach x auf. So erhältst du die **Nullstellen** von f_a. An diesen Stellen schneidet der Graph G_a die x-Achse.

$$\begin{aligned} f_a(x) &= 0 \\ \mathrm{e}^{a\cdot(x-3)} + \mathrm{e}^{a\cdot(3-x)} &= 0 \end{aligned}$$

Betrachte die linke Seite der Gleichung: Beide Summanden sind **immer positiv**, weil die e-Funktion niemals einen Wert annimmt, der kleiner oder gleich Null ist. Links vom Gleichheitszeichen steht also ein **positiver** Wert, während rechts die Null steht. Dies ist ein Widerspruch, d.h. die Gleichung hat keine Lösung. Entsprechend schneidet der Graph G_a die x-Achse nicht.

2. Schritt: Schnittpunkte mit der y-Achse

Der Schnittpunkt von G_a mit der y-Achse hat allgemein die Koordinaten $S_y\,(0 \mid f_a(0))$. Bestimme also $f_a(0)$:

$$\begin{aligned} f_a(0) &= \mathrm{e}^{a\cdot(0-3)} + \mathrm{e}^{a\cdot(3-0)} \\ &= \mathrm{e}^{-3a} + \mathrm{e}^{3a} \end{aligned}$$

Der Graph G_a schneidet die y-Achse im Punkt $S_y\left(0 \mid \mathrm{e}^{-3a} + \mathrm{e}^{3a}\right)$.

▶ Verhalten der Funktionswerte von f_a für $x \to \pm\infty$ angeben

Wir betrachten zunächst den Fall für $x \to \infty$ und anschließend den Fall für $x \to -\infty$.

Betrachte im Vorfeld den Funktionsterm von f_a: Die Klammern in den beiden Exponenten $(3-x)$ und $(x-3)$ sind sehr ähnlich. Tatsächlich gilt:
$(3-x) = (-x+3) = -(x+3)$.

Für den Funktionsterm kannst du also schreiben:
$f_a(x) = \mathrm{e}^{a\cdot(x-3)} + \mathrm{e}^{a\cdot(-(x-3))} = \mathrm{e}^{a\cdot(x-3)} + \mathrm{e}^{-a\cdot(x-3)}$

Diese Schreibweise ist hilfreich, vor allem weil der Parameter a wegen $a \neq 0$ sowohl positive als auch negative Werte annehmen kann. In dieser Schreibweise sind nun aber die Parameter a und $-a$ erhalten. Diese haben einmal ein positives und einmal ein negatives Vorzeichen.

Außerdem gilt: Für große positive Werte von x strebt die e-Funktion gegen Unendlich. Für betragsmäßig große negative Werte von x strebt die e-Funktion gegen Null.

1. Schritt: Verhalten von $f_a(x)$ für $x \to \infty$

$$\lim_{x\to\infty} f_a(x) = \lim_{x\to\infty} \left(\mathrm{e}^{a(x-3)} + \mathrm{e}^{-a\cdot(x-3)}\right)$$

Für $a > 0$ gilt: $a > 0$ und $-a < 0$.
Für $a < 0$ gilt: $a < 0$ und $-a > 0$.

Im Funktionsterm hat in beiden Fällen die gleiche Form. Es muss also keine Fallunterscheidung für a gemacht werden. Wir gehen der Einfachheit von einem positiven Wert für a aus, also von $a > 0$.

$$\lim_{x\to\infty} f_a(x) = \lim_{x\to\infty}\left(\underbrace{e^{\overbrace{a\,(x-3)}^{>0}}}_{\to\infty} + \underbrace{e^{\overbrace{-a\cdot(x-3)}^{<0}}}_{\to 0}\right) = \infty$$

2. Schritt: Verhalten von $f_a(x)$ für $x \to -\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f_a(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(e^{a(x-3)} + e^{-a\cdot(x-3)}\right)$$

Beachte dass nun **betragsmäßig große negative Werte** von x betrachtet werden. Insbesondere heißt das, dass gilt: $x < 0$ und damit auch $(x-3) < 0$.

Wir gehen wieder von $a > 0$ aus.

$$\lim_{x\to-\infty} f_a(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\underbrace{e^{\overbrace{a\,(x-3)}^{<0}}}_{\to 0} + \underbrace{e^{\overbrace{-a\cdot(x-3)}^{>0}}}_{\to\infty}\right) = \infty$$

Es folgt also: $\lim\limits_{x\to\infty} f_a(x) = +\infty$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} f_a(x) = +\infty$.

b) ▶ **Gleichen lokalen Extrempunkt der Graphen G_a nachweisen** (10P)

Gesucht sind die Extrempunkte der Graphen G_a, d.h. die **Extremstellen** x_E der Funktionen f_a. Für diese gilt:

- das notwendige Kriterium $f_a'(x_E) = 0$,
- das hinreichende Kriterium $f_a''(x_E) > 0$ für ein **lokales Minimum** und $f_a''(x_E) < 0$ für ein **lokales Maximum**.

Du kannst so vorgehen:

- Bestimme zunächst die ersten beiden Ableitungen von f_a nach der Kettenregel.
- Setze $f_a'(x) = 0$ und löse nach x auf. So erhältst du die potentiellen Extremstellen x_E.
- Bestimme über das hinreichende Kriterium die **Art** der Extremstellen.
- Berechne zuletzt über $f_a(x_E)$ die zugehörige y-Koordinate.
- Die Graphen haben alle den **gleichen** lokalen Extrempunkt, wenn dessen Koordinaten **unabhängig** vom Parameter $\boldsymbol{a}$ sind.

1. Schritt: Ableitungen bilden

$$\begin{aligned} f_a(x) &= e^{a(x-3)} + e^{a(3-x)} \\ f_a'(x) &= a\cdot e^{a(x-3)} + (-a)\cdot e^{a(3-x)} \\ &= ae^{a(x-3)} - ae^{a(3-x)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_a''(x) &= a\cdot a\cdot e^{a(x-3)} - a\cdot(-a)\cdot e^{a(3-x)} \\ &= a^2e^{a(x-3)} + a^2e^{a(3-x)} \end{aligned}$$

2. Schritt: $f'_a(x) = 0$ nach x auflösen

$$\begin{aligned}
f''_a(x) &= 0 \\
a\mathrm{e}^{a(x-3)} - a\mathrm{e}^{a(3-x)} &= 0 && |:a \quad \text{(Es gilt: } a \neq 0) \\
\mathrm{e}^{a(x-3)} - \mathrm{e}^{a(3-x)} &= 0 && |\ +\mathrm{e}^{a(3-x)} \\
\mathrm{e}^{a(x-3)} &= \mathrm{e}^{a(3-x)} && |\ \ln(\ ) \\
a(x-3) &= a(3-x) && |:a \\
x-3 &= 3-x && |\ +x+3 \\
2x &= 6 && |:2 \\
x &= 3
\end{aligned}$$

Als potentielle Extremstelle ergibt sich $x_E = 3$.

3. Schritt: Art der Extremstelle untersuchen

Setze $x_E = 3$ in die zweite Ableitung von f_a ein und untersuche so die Art der Extremstelle. Da a sowohl positive als auch negative Werte annehmen kann, musst du ggf. eine Fallunterscheidung durchführen.

$$\begin{aligned}
f''_a(3) &= a^2\mathrm{e}^{a(3-3)} + a^2\mathrm{e}^{a(3-3)} \\
&= a^2\mathrm{e}^{a\cdot 0} + a^2\mathrm{e}^{a\cdot 0} \\
&= 2\cdot a^2\mathrm{e}^0 \\
&= 2\cdot a^2 \cdot 1 \\
&= 2a^2
\end{aligned}$$

Aufgrund des Quadrates ist $2a^2$ immer **positiv**. Also liegt an der Stelle $x_E = 3$ ein **lokales Minimum** vor.

4. Schritt: Zugehörige y-Koordinate berechnen

Setze $x_E = 3$ in $f_a(x)$ ein, um so die y-Koordinate des Tiefpunktes zu berechnen:

$$\begin{aligned}
f_a(3) &= \mathrm{e}^{a\cdot(3-3)} + \mathrm{e}^{a\cdot(3-3)} \\
&= \mathrm{e}^{a\cdot 0} + \mathrm{e}^{a\cdot 0} \\
&= 2\cdot \mathrm{e}^0 \\
&= 2\cdot 1 \\
&= 2
\end{aligned}$$

Der Tiefpunkt hat die Koordinaten $T\,(3 \mid 2)$. Beide Koordinaten sind unabhängig von a. Also folgt:
Alle Graphen G_a haben in $T(3 \mid 2)$ einen gemeinsamen lokalen Tiefpunkt.

▶ Begründen, dass keine Wendepunkte existieren

Für eine Wendestelle x_W von f_a müsste gelten:

- notwendiges Kriterium $f''_a(x_W) = 0$,
- hinreichendes Kriterium $f'''_a(x_W) \neq 0$.

Der Graph G_a besitzt keine Wendepunkte, wenn die Gleichung $f''_a(x_W) = 0$ keine Lösung besitzt:

$$\begin{aligned} f_a''(x_W) &= 0 \\ a^2 e^{a(x-3)} + a^2 e^{a(3-x)} &= 0 \qquad |:a^2 \quad \text{(Es gilt: } a \neq 0) \\ e^{a(x-3)} + e^{a(3-x)} &= 0 \end{aligned}$$

Wie bereits bei der Berechnung der Nullstelle fällt auf: Auf der linken Seite des Gleichheitszeichens sind beide Summanden **positiv**. Also steht auf der linken Seite der Gleichung ein positiver Wert. Rechts hingegen steht die Null. Dies ist wie oben ein Widerspruch, deshalb besitzt die Gleichung keine Lösung.

Damit besitzt auch der Graph G_a keine Wendepunkte.

c) ► **$G_{0,5}$ zeichnen** (10P)

Bisher wurde allgemein der Graph G_a betrachtet, nun wird $G_{0,5}$ für $a = 0,5$ untersucht. Setze $a = 0,5$ in die Koordinaten des Schnittpunkts mit der y-Achse ein. Dann kennst du bereits die Grenzwerte der Funktionswerte $f_{0,5}(x)$, den Tiefpunkt von $G_{0,5}$ und dessen Schnittpunkt mit der y-Achse.

Darüber hinaus bietet es sich an, im Bereich $[-1\,;\,7]$ eine **Wertetabelle** anzufertigen.

Bestimme also im ersten Schritt die Koordinaten des Schnittpunktes mit der y-Achse und fertige eine Wertetabelle an und zeichne abschließend den Graphen.

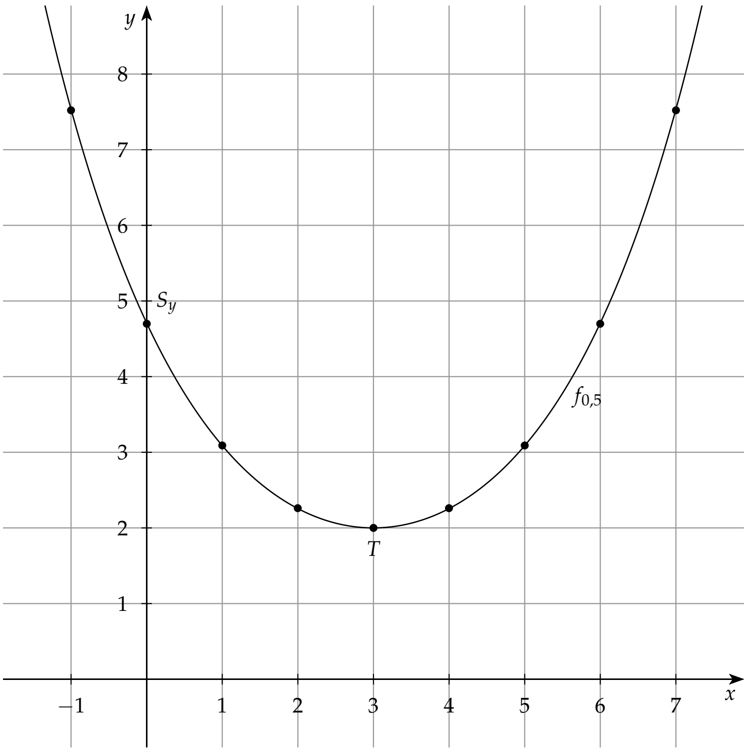
1. Schritt: Schnittpunkt mit der y-Achse bestimmen und Wertetabelle anfertigen

Allgemein hat der Schnittpunkt mit der y-Achse die Koordinaten $S_y\left(0 \mid e^{-3a} + e^{3a}\right)$. Für $a = 0,5$ ergibt sich: $S_y\left(0 \mid e^{-1,5} + e^{1,5}\right) \approx S_y(0 \mid 4,7)$.

Mit $f_{0,5}(x) = e^{0,5(x-3)} + e^{0,5(3-x)}$ ergibt sich folgende Wertetabelle:

x	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
$f_{0,5}(x)$	$7,52$	$4,7$	$3,09$	$2,26$	2	$2,26$	$3,09$	$4,7$	$7,52$

2. Schritt: Graph G_a zeichnen



▶ Funktionsgleichung der Parabel p bestimmen

Nun wird das Intervall $[0\,;\,6]$ betrachtet. In diesem Intervall soll der Graph G_a durch eine Parabel p angenähert werden. Aus der Aufgabenstellung weißt du, dass p

- im Tiefpunkt $T(3 \mid 2)$,
- an den beiden Randpunkten, d.h. bei $x = 0$ und $x = 6$

mit $G_{0,5}$ identisch ist. Du kannst so vorgehen:

- Berechne zunächst die exakten Koordinaten der beiden Randpunkte.
- Bestimme dann die Funktionsgleichung der Parabel über die Scheitelpunktform $p(x) = a \cdot (x - x_S)^2 + y_S$, wobei der Scheitelpunkt (Tiefpunkt) die Koordinaten $S(x_S \mid y_S)$ besitzt.

1. Schritt: Koordinaten der Punkte berechnen

Der Tiefpunkt hat die Koordinaten $T(3 \mid 2)$. Die beiden Randpunkte möchten wir mit R_1 und R_2 bezeichnen. Sie haben die Koordinaten
$R_1\,(0 \mid f_{0,5}(0))$ und $R_2\,(6 \mid f_{0,5}(6))$.
Für die y-Koordinaten gilt:

$$\begin{aligned} f_{0,5}(0) &= \mathrm{e}^{0,5\cdot(0-3)} + \mathrm{e}^{0,5\cdot(3-0)} \\ &= \mathrm{e}^{0,5\cdot(-3)} + \mathrm{e}^{0,5\cdot 3} \\ &= \mathrm{e}^{-1,5} + \mathrm{e}^{1,5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{0,5}(6) &= \mathrm{e}^{0,5\cdot(6-3)} + \mathrm{e}^{0,5\cdot(3-6)} \\ &= \mathrm{e}^{0,5\cdot 3} + \mathrm{e}^{0,5\cdot(-3)} \\ &= \mathrm{e}^{1,5} + \mathrm{e}^{-1,5} \end{aligned}$$

Die Punkte sind also $R_1\left(0 \mid \mathrm{e}^{1,5} + \mathrm{e}^{-1,5}\right)$ und $R_2\left(6 \mid \mathrm{e}^{1,5} + \mathrm{e}^{-1,5}\right)$.

2. Schritt: Funktionsgleichung von p ermitteln

Als Parabel hat p die Funktionsgleichung $p(x) = a \cdot (x - x_S)^2 + y_S$. Dabei sind $(x_S \mid y_S)$ die Koordinaten des Scheitelpunktes. In unserem Fall ist der Scheitelpunkt der Tiefpunkt $T(3 \mid 2)$. Es folgt also zunächst:

$p(x) = a\,(x-3)^2 + 2.$

Setze nun die Koordinaten von R_1 oder R_2 in die Funktionsgleichung ein und löse nach a auf. Wir wählen $R_1\left(0 \mid \mathrm{e}^{1,5} + \mathrm{e}^{-1,5}\right)$:

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{1,5} + \mathrm{e}^{-1,5} &= a\,(0-3)^2 + 2 \qquad \mid -2 \\ \mathrm{e}^{1,5} + \mathrm{e}^{-1,5} - 2 &= (-3)^2 a \\ \mathrm{e}^{1,5} + \mathrm{e}^{-1,5} - 2 &= 9a \mid :9 \\ \frac{1}{9}\left(\mathrm{e}^{1,5} + \mathrm{e}^{-1,5} - 2\right) &= a \approx 0,3 \end{aligned}$$

Damit folgt die Funktionsgleichung $p(x) = 0,3(x-3)^2 + 2$.

d) ► **Höhe und Winkel der Kettenbefestigung berechnen** (10P)

In diesem Aufgabenteil wird die Funktion $f_{0,2}$ mit $a = 0,2$ betrachtet; ihr Graph ist $G_{0,2}$. Mit diesem Graphen soll die in der Abbildung dargestellte Kette modelliert werden. Der Fußpunkt des linken Pfostens befindet dabei laut Aufgabenstellung im Ursprung $O(0 \mid 0)$. Der **Boden** wird also durch die x-Achse modelliert. Der **linke Pfosten** würde im Koordinatensystem auf der y-Achse liegen.

Gefragt ist, in welcher **Höhe** und unter **welchem Winkel** die Kette am Pfosten befestigt ist. In unserer Modellierung heißt das:

- Der Befestigungspunkt liegt auf der y-Achse mit $x = 0$. Gesucht ist der Punkt, in welchem $G_{0,2}$ die y-Achse schneidet, also S_y.
- Weiterhin ist gefragt, welchen Winkel die Kette ($G_{0,2}$) mit dem Pfosten (y-Achse) einschließt. Diesen Winkel kannst du bestimmen, wenn du den **Steigungswinkel** von $f_{0,2}$ an der Stelle $x = 0$ berechnest.

Du kannst also so vorgehen:

- Bestimme im ersten Schritt die Koordinaten des Schnittpunktes von $G_{0,2}$ mit der y-Achse. Berechne aus dessen y-Koordinate die Höhe, in der die Kette angebracht ist.
- Berechne sodann den Steigungswinkel α von $f_{0,2}$ an der Stelle $x_0 = 0$. Nutze dazu die Beziehung $\tan(\alpha) = m_t$, wobei m_t die Steigung der Tangente an $G_{0,2}$ bei $x = 0$ ist.
- Der Steigungswinkel α ist der Winkel, den der Graph $G_{0,2}$ mit der x-Achse einschließt. Gesucht ist der Winkel β, den der Graph $G_{0,2}$ mit der y-Achse einschließt. Überlege: x-Achse und y-Achse schließen einen rechten Winkel ein. Berechne aus dieser Beziehung Winkel β.

1. Schritt: Schnittpunkt mit der y-Achse berechnen

Oben hast du mit $S_y\left(0 \mid \mathrm{e}^{-3a} + \mathrm{e}^{3a}\right)$ allgemein die Koordinaten des Schnittpunktes von G_a mit der y-Achse berechnet. Setze nun $a = 0,2$ ein:
$S_y\left(0 \mid \mathrm{e}^{-0,6} + \mathrm{e}^{0,6}\right) \approx (0 \mid 2,37)$.

Laut Aufgabenstellung soll 1 LE im Koordinatensystem 0,5 m in der Wirklichkeit entsprechen. Im Koordinatensystem wird die Kette in einer Höhe von 2,37 LE befestigt. Dies entspricht dann einer Höhe von $(0,5 \cdot 2,37)\,\mathrm{m} \approx 1,2\,\mathrm{m}$ in Wirklichkeit.

Die Kette wird in einer Höhe von etwa 1,2 m befestigt.

2. Schritt: Winkel berechnen

Den Winkel α, welchen $G_{0,2}$ mit der x-Achse einschließt, kannst du über folgende Beziehung berechnen:

$\tan(\alpha) = m_t$.

Dabei ist m_t die Steigung der Tangente bei $x = 0$. Die Steigung der Tangente stimmt überein mit der Steigung der zugehörigen Funktion im Berührpunkt. Die Steigung einer Funktion wiederum kannst du über ihre erste Ableitung berechnen. Also gilt:

$m_t = f'_{0,2}(0)$.

Berechne diesen Wert:

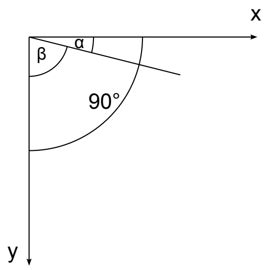
$$\begin{aligned} f_a'(x) &= ae^{a(x-3)} - ae^{a(3-x)} \\ f_{0,2}'(x) &= 0,2e^{0,2(x-3)} - 0,2e^{0,2(3-x)} \\ f_{0,2}'(0) &= 0,2e^{0,2\cdot(-3)} - 0,2e^{0,2\cdot 3} \\ &= 0,2\cdot e^{-0,6} - 0,2e^{0,6} \end{aligned}$$

Für den Winkel α, den G_a mit der x-Achse einschließt, gilt dann:

$$\begin{aligned} \tan(\alpha) &= 0,2\cdot e^{-0,6} - 0,2e^{0,6} && \mid \tan^{-1}(\,) \\ \alpha &= \tan^{-1}(0,2\cdot e^{-0,6} - 0,2e^{0,6}) \approx -14,3\,^\circ \end{aligned}$$

Der Winkel hat ein negatives Vorzeichen, weil die Steigung von $f_{0,2}$ an der Stelle $x = 0$ negativ ist. Es folgt also: $G_{0,2}$ schließt mit der x-Achse den Winkel $\alpha = 14,3\,^\circ$ ein.

x-Achse und y-Achse schließen gemeinsam einen Winkel von $90\,^\circ$ ein. Für den Winkel β, den der Graph $G_{0,2}$ mit der y-Achse einschließt, gilt dann also:

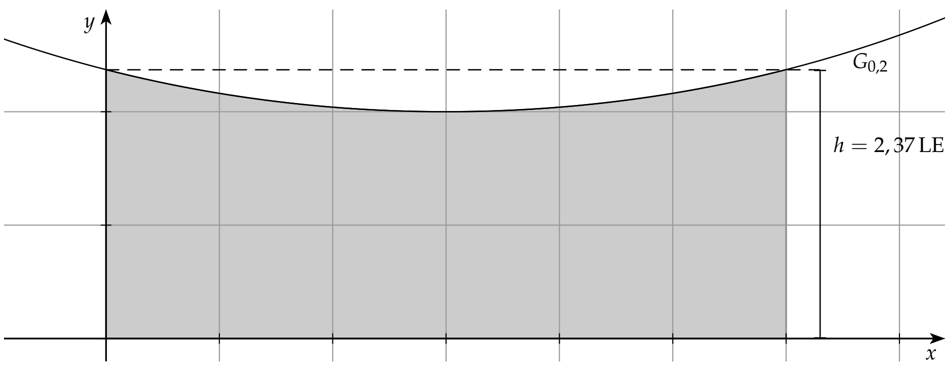


$\alpha + \beta = 90\,^\circ$
und somit
$\beta = 90\,^\circ - \alpha = 90\,^\circ - 14,3\,^\circ = 75,7\,^\circ$

Die Kette ist unter einem Winkel von 75,7 ° befestigt.

▶ Größe der eingeschlossenen Fläche berechnen

Betrachte die eingeschlossene Fläche zunächst einem Koordinatensystem. Du kannst sie auch in der Abbildung markieren, die du in der Aufgabenstellung gegeben hast.



Bekannt ist:

- Die Fläche wird vom Graphen $G_{0,2}$ und der x-Achse zwischen zwei Grenzen eingeschlossen.
- Die untere Grenze ist $x_U = 0$.
- Über die obere Grenze x_O weißt du, dass die Kette, d.h. $G_{0,2}$ sich an dieser Stelle wieder auf der Ausgangshöhe von 2,37 LE befindet. Es muss also gelten: $f_{0,2}(x_O) = 2,37$. Diese Gleichung ist aber nicht leicht zu lösen. Überlege deshalb, an welcher Stelle sich die obere Grenze befinden könnte und weise diese nach.

Du kannst nun so vorgehen:

- Versuche, aus deiner bisherigen Erfahrung mit der Kettenlinie, eine mögliche obere Grenze x_O zu erraten und weise diese nach.
- Berechne dann den Inhalt der oben grau gefärbten Fläche über den Hauptsatz der Integralrechnung.

1. Schritt: Obere Grenze x_O ermitteln

Bereits in Aufgabenteil c) kannst du im Graphen $G_{0,5}$ eine **Achsensymmetrie** zur Parallelen zur y-Achse durch den Tiefpunkt beobachten. Diese Parallele hat die Gleichung $x = 3$.
Auch die abgebildete Kette zeigt eine solche Achsensymmetrie. Da der Tiefpunkt bei $x = 3$ liegt und die untere Grenze, d.h. der linke Pfosten bei $x = 0$, so müsste sich der rechte Pfosten, also die obere Grenze bei $x = 6$ befinden.
Zeige also, dass $f_{0,2}(6) = 2,37$ gilt:

$$\begin{aligned} f_{0,2}(6) &= e^{0,2(6-3)} + e^{0,2\cdot(3-6)} \\ &= e^{0,6} + e^{-0,6} \approx 2,37 \end{aligned}$$

Damit ist $x = 6$ als die Position des rechten Pfostens nachgewiesen.

2. Schritt: Inhalt der Fläche berechnen

Sei A der Inhalt der eingeschlossenen Fläche. Mit dem Hauptsatz der Integralrechnung folgt:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^6 f_{0,2}(x)\,dx \\ &= [F_{0,2}(x)]_0^6 \\ &= F_{0,2}(6) - F_{0,2}(0) \end{aligned}$$

Du benötigst also eine **Stammfunktion** von $f_{0,2}$. Dann kannst du den Inhalt der Fläche ausrechnen. Eine solche Stammfunktion $F_{0,2}$ kannst du über **lineare Substitution** bestimmen:

$$\begin{aligned} F_{0,2}(x) &= \int f_{0,2}(x)\,dx \\ &= \int \left(e^{0,2(x-3)} + e^{0,2(3-x)}\right)\,dx \\ &= \frac{1}{0,2}e^{0,2(x-3)} + \frac{1}{(-0,2)}e^{0,2(3-x)} \\ &= 5e^{0,2(x-3)} - 5e^{0,2(3-x)} \end{aligned}$$

Einsetzen in die Gleichung zur Berechnung von A ergibt:

$$\begin{aligned} A &= F_{0,2}(6) - F_{0,2}(0) \\ &= (5e^{0,2(6-3)} - 5e^{0,2(3-6)}) - (5e^{0,2(0-3)} - 5e^{0,2(3-0)}) \\ &= 5e^{0,6} - 5e^{-0,6} - 5e^{-0,6} + 5e^{0,6} \\ &= 10e^{0,6} - 10e^{-0,6} \approx 12,73 \end{aligned}$$

Die Fläche ist etwa 12,73 FE groß. Laut Aufgabenstellung entspricht 1 LE im Koordinatensystem 0,5 m in Wirklichkeit. Also entspricht 1 FE im Koordinatensystem $(0{,}5\,\text{m})^2 = 0,25\,\text{m}^2$ in Wirklichkeit.

Damit ergibt zuletzt der Flächeninhalt: $12,73 \cdot 0,25\,\text{m}^2 = 3,18\,\text{m}^2$.

Die Fläche ist etwa 3,18 m^2 groß.

e) ▶ **Symmetrieachse und zwei Punkte einzeichnen** (5P)

Die Symmetrieachse ist eine Parallele zur y-Achse durch den Tiefpunkt des Graphen. Dieser lag bei allen Graphen G_a bei $T\,(3 \mid 2)$. Die Symmetrieachse hat also die Gleichung $x = 3$.

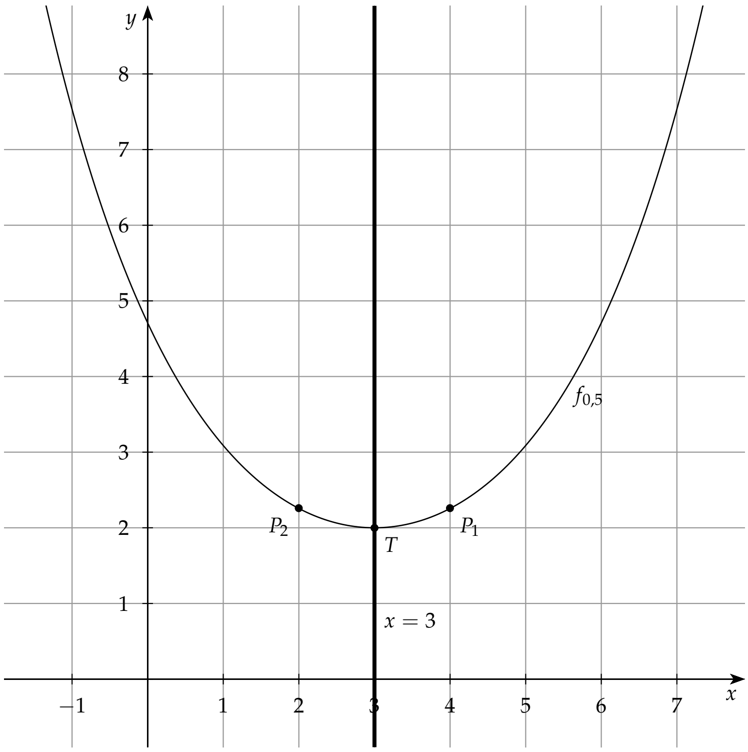
Zusätzlich zur Symmetrieachse sollen zwei Punkte $P_1\,(x_E + t \mid f_{0,5}(x_E + t))$ und $P_2\,(x_E - t \mid f_{0,5}(x_E - t))$ eingezeichnet werden. In unserem Kontext haben sie die Koordinaten $P_1\,(3 + t \mid f_{0,5}(3 + t))$ und $P_2\,(3 - t \mid f_{0,5}(3 - t))$ Überlege zunächst welche Eigenschaft diese beiden Punkte haben:

- Die x-Koordinate $3 + t$ bzw. $3 - t$ bedeutet: P_1 liegt t LE **rechts** von der Symmetrieachse und P_2 liegt t LE **links** von der Symmetrieachse.
- Aufgrund der Achsensymmetrie haben beide Punkte dieselbe y-Koordinate. Sie sind also **Spiegelpunkte** bezüglich der Achse $x = 3$.

Wähle für t einen beliebigen Wert mit $t < 3$, z.B. $t = 1$. Die Koordinaten der beiden Punkte entnehmen wir der Wertetabelle aus Aufgabenteil c):

$P_1(3 + 1 \mid f_{0,5}(3 + 1)) = (4 \mid 2{,}26)$ und $P_2\,(3 - 1 \mid f_{0,5}(3 - 1)) = (2 \mid 2{,}26)$.

Zeichne die Symmetrieachse und die beiden Punkte ein:



▶ **Symmetrie nachweisen**

Der Graph einer Funktion f ist achsensymmetrisch zu einer Parallelen zur y-Achse mit der Gleichung $x = a$, falls gilt:

$f(a - x) = f(a + x)$.

In unserem Fall muss also gelten: $f_{0,5}(3 - x) = f_{0,5}(3 + x)$. Zeige durch Einsetzen, dass diese Gleichung stimmt:

$$\begin{aligned}
f_{0,5}(3-x) &= f_{0,5}(3+x)\\
e^{0,5((3-x)-3)}+e^{0,5(3-(3-x))} &= e^{0,5((3+x)-3)}+e^{0,5(3-(3+x))}\\
e^{0,5(3-x-3)}+e^{0,5(3-3+x)} &= e^{0,5(3+x-3)}+e^{0,5(3-3-x)}\\
e^{0,5(-x)}+e^{0,5x} &= e^{0,5x}+e^{0,5(-x)}\\
e^{-0,5x}+e^{0,5x} &= e^{0,5x}+e^{-0,5x} && \mid \text{Kommutativgesetz der Addition}\\
e^{-0,5x}+e^{0,5x} &= e^{-0,5x}+e^{0,5x}
\end{aligned}$$

Beide Seiten der Gleichung sind gleich. Damit ist nachgewiesen, dass der Graph $G_{0,5}$ achsensymmetrisch zur Geraden mit der Gleichung $x = 3$ ist.