Gegeben sind die Funktionen f und g mit $f(x) = x \cdot \mathrm{e}^{-0,5 \cdot x^2}$ und $g(x) = x \cdot \mathrm{e}^{0,5 \cdot x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

Ohne Nachweis kann im Folgenden benutzt werden: $f'(x) = (1 - x^2) \cdot \mathrm{e}^{-0,5 \cdot x^2}$.

a) ▶ **Graphzuordnung begründen** (15P)

Du sollst begründen, dass Graph II aus der gegebenen Abbildung zur Funktion f gehört. Berechne dazu beispielsweise die Koordinaten eines Punktes P, der zwar auf dem Graphen von f, aber nicht auf dem Graphen von g liegt. Anschließend siehst du anhand der Abbildung, dass dieser Punkt auch auf Graph II liegt.

Einen solchen Punkt findest du, indem du anhand der Abbildung einen Wert von x abliest, für den sich die beiden Graphen nicht schneiden und diesen anschließend in $f(x)$ einsetzt.

Wähle also beispielsweise $x = 1$ und berechne $f(1)$.

$f(1) = 1 \cdot \mathrm{e}^{-0,5 \cdot 1^2} = \mathrm{e}^{-0,5}$.

Dann liegt der Punkt $P(1 \mid \mathrm{e}^{-0,5})$ zwar auf dem Graphen von f, aber nicht auf dem Graphen von g, und gleichzeitig auf Graph II. Daher ist Graph II der Graph von f.

▶ **Symmetrieverhalten von f untersuchen**

Du sollst das Symmetrieverhalten von f untersuchen. Dir sind zwei mögliche Symmetrien von Graphen bekannt:

- **Punktsymmetrie zum Ursprung**: Der Graph einer Funktion f ist punktsymmetrisch zum Ursprung, wenn für alle x im Definitionsbereich gilt: $f(-x) = -f(x)$.
- **Achsensymmetrie zur y-Achse**: Der Graph einer Funktion f ist achsensymmetrisch zur y-Achse, wenn für alle x im Definitionsbereich gilt: $f(-x) = f(x)$.

Überprüfe diese beiden Symmetrieverhalten nun für f. Anhand der Abbildung der beiden Graphen kannst du bereits sehen, dass der Graph von f am ehesten punktsymmetrisch zum Ursprung ist. Überprüfe also zuerst die Punktsymmetrie:

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x) \cdot \mathrm{e}^{-0,5 \cdot (-x)^2} && \mid\ (-x)^2 = x^2 \\ &= (-x) \cdot \mathrm{e}^{-0,5 \cdot x^2} \\ &= -\left(x \cdot \mathrm{e}^{-0,5 \cdot x^2}\right) \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

Der Graph von f ist punktsymmetrisch zum Ursprung, da für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $f(-x) = -f(x)$.

▶ **Bedingungen für eine Tangente in einem Punkt an einen Graphen angeben**

Du sollst die allgemeinen Bedingungen für eine Tangente in einem Punkt P an einen Graphen von f angeben.

Eine Tangente an einen Graphen von f in einem Punkt P ist eine Gerade, die den Graphen in diesem vorgegebenen Punkt P berührt, ihn dort aber nicht schneidet. Sie hat die gleiche Steigung wie f in diesem Punkt. Es ergeben sich demnach die beiden Bedingungen:

I) Die Tangente und der Graph der Funktion haben den gemeinsamen Punkt P.

II) Die Tangente und der Graph der Funktion stimmen im Punkt P in der Steigung überein.

▶ Nachweisen, dass die Graphen von f und g im Ursprung die gleiche Tangente haben

Du sollst nun nachweisen, dass die Graphen von f und g im Ursprung die gleiche Tangente haben. Die Geradengleichung der Tangente im Ursprung an den Graphen von f ist dir in der Aufgabe mit $y = x$ vorgegeben. Du musst nun noch die oben genannten Bedingungen für eine Tangente an den Graphen von g im Ursprung überprüfen.

Da die Tangente durch den Ursprung verläuft, muss für g gelten: $g(0) = 0$.

Zudem müssen die Tangente und der Graph von g die gleiche Steigung im Ursprung haben. Berechne also die Steigung der Tangenten, sowie die Steigung des Graphen von g im Ursprung. Die Steigung des Graphen einer Funktion f wird durch die erste Ableitung f' beschrieben.

1. Bedingung: gemeinsamer y-Wert

Überprüfe die erste Bedingung, indem du $g(0)$ berechnest:

$$\begin{aligned} g(0) &= 0 \cdot e^{0,5\cdot 0^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

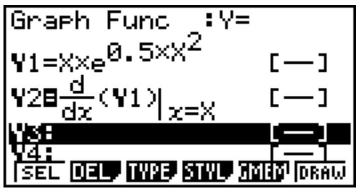
Der Graph von g verläuft also genau wie die Tangente an den Graphen von f durch den Ursprung.

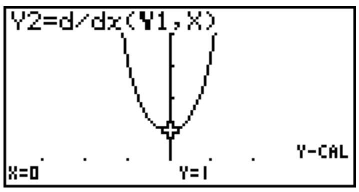
2. Bedingung: gemeinsame Steigung im Ursprung

Die Steigung einer Gerade ist genau der Koeffizient vor dem x. Demnach hat die Tangente $y = x$ einen Steigungswert von $m = 1$.

Berechne nun die Steigung des Graphen von g im Ursprung. Bilde dazu die erste Ableitung g' von g und setze anschließend $x = 0$ in $g'(x)$ ein.

Die erste Ableitung g' kannst du mit dem GTR bilden. Gib dazu im `GRAPH`-Menü des GTR zunächst den Funktionsterm von g ein. Gib nun als zweiten Funktionsterm die erste Ableitung von g ein. Den Befehl für Ableiten findest du unter `OPTN → F2(CALC) → F1`. Gib in die Klammer nun `Y1` für g ein. Wähle dazu `Y` das dir in der Leiste angezeigt wird mit `F1`.





Zeichne nun den Graphen von g' in deinem GTR. Berechne anschließend $g'(0)$, indem du unter `F5(G-Solv) → F6 → F1(Y-CAL)` $x = 0$ eingibst. Du erhältst dann das Ergebnis: $g'(0) = 1$. Der Graph von g hat also im Ursprung die Steigung 1.

Die Tangente $y = x$ im Ursprung an den Graphen von f hat die gleiche Steigung wie der Graph von g im Ursprung.

Es gilt $g(0) = 0$ und $g'(0) = 1$. Damit sind beide Bedingungen für die Tangente $y = x$ im Ursprung an den Graphen von f auch für den Graphen von g erfüllt. Die Graphen von f und g haben damit im Ursprung dieselbe Tangente.

▶ Stellen ermitteln, an denen sich die y-Werte von f und g um den Wert 2 unterscheiden

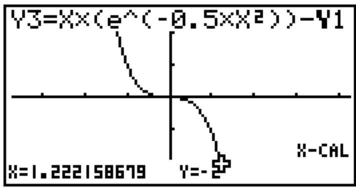
Du sollst die Stellen berechnen, für die sich die y-Werte von f und g um den Wert 2 unterscheiden. Du suchst also die x-Werte für die eine der folgenden Gleichungen erfüllt ist:

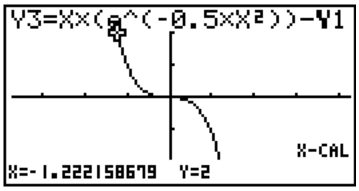
I $f(x) - g(x) = 2$

II $f(x) - g(x) = -2$

Bestimme also die Lösungen der beiden Gleichungen I und II. Dies kannst du mit dem GTR tun, indem du $f - g$ als neue Funktion h auffasst und die Schnittstellen von h mit der Konstanten $y = 2$ bzw. $y = -2$ berechnest.
Für h ergibt sich:

$$\begin{aligned} h(x) &= f(x) - g(x) \\ &= x \cdot \mathrm{e}^{-0{,}5\cdot x^2} - x \cdot \mathrm{e}^{0{,}5\cdot x^2} \\ &= x \cdot \left(\mathrm{e}^{-0{,}5\cdot x^2} - \mathrm{e}^{0{,}5\cdot x^2}\right) \end{aligned}$$





Gib dazu $h(x)$ als neuen Funktionsterm im `GRAPH`-Menü des GTR ein und die den zugehörigen Graphen anzeigen lässt.

Berechne nun zuerst die Lösungen von I), indem du unter `F5(G-Solv)` → `F6` → `F2(X-CAL)` `Y=2` eingibst. Dann erhältst du das Ergebnis: $x_1 \approx -1{,}222$.

Gehe nun genauso bei II vor. Dort erhältst du das Ergebnis: $x_2 \approx 1{,}222$. Die y-Werte von f und g unterscheiden sich bei $x_1 \approx -1{,}222$ und $x_2 \approx 1{,}222$ um den Wert 2.

b) **▶ Zeigen, dass der Graph von f genau zwei Extrempunkte besitzt** (14P)

Du sollst nun zeigen, dass der Graph von f genau zwei Extrempunkte besitzt. Für eine Extremstelle x_E gibt es zwei Kriterien:

- **Das notwendige Kriterium:** Die erste Ableitung f' der Funktion f muss an einer möglichen Extremstelle eine Nullstelle haben. Es muss gelten: $f'(x_E) = 0$. Setze demnach $f'(x) = 0$ und löse nach x auf, um mögliche Extremstellen zu berechnen.

- **Das hinreichende Kriterium:** Um die möglichen Extremstellen x_E nun daraufhin zu untersuchen, ob diese auch tatsächlich Extremstellen sind, gibt es zwei Möglichkeiten:
  - **Das Vorzeichen-Wechsel-Kriterium:** In einer Maximalstelle liegt immer ein Vorzeichen-Wechsel von $+$ nach $-$ in der ersten Ableitung vor. Für eine Minimalstelle gilt genau das Gegenteil.
  - **GTR:** Die zweite Ableitung f'' von f darf in einer Extremstelle nicht Null sein. Es muss also gelten $f''(x_E) \neq 0$. Berechne also die Funktionswerte der zweiten Ableitung in den möglichen Extremstellen mit dem GTR.

1. Schritt: notwendiges Kriterium überprüfen

Berechne zunächst die möglichen Extremstellen, indem du $f'(x) = 0$ setzt und die Gleichung nach x auflöst:

$$0 = (1 - x^2) \cdot \mathrm{e}^{-0{,}5\cdot x^2}$$

Dies ist ein Produkt zweier Terme. Wegen dem Satz vom Nullprodukt muss entweder $1-x^2=0$ oder $\mathrm{e}^{-0,5\cdot x^2}=0$ erfüllt sein. Letzteres ist niemals erfüllt, weil die e-Funktion immer echt größer Null ist. Demnach kann die oben stehende Gleichung nur erfüllt werden, wenn $1-x^2=0$ gilt.

Löse nun die Gleichung $1-x^2=0$ nach x auf und erhalte so die möglichen Extremstellen von f:

$$\begin{aligned} 0 &= 1-x^2 && \mid +x^2 \\ x^2 &= 1 && \mid \sqrt{} \\ x_1 &= +\sqrt{1} \\ &= 1 \\ x_2 &= -\sqrt{1} \\ &= -1 \end{aligned}$$

Du weißt nun, dass bei $x_1=1$ und $x_2=-1$ zwei mögliche Extrempunkte des Graphen von f liegen.

2. Schritt: hinreichendes Kriterium überprüfen

►► Lösungsweg A: Vorzeichen-Wechsel-Kriterium

Überprüfe nun mit Hilfe des Vorzeichen-Wechsel-Kriteriums, ob es sich bei den möglichen Extremstellen auch tatsächlich um Extremstellen handelt. Betrachte zuerst $x_1=1$:

Setze hierfür einen x-Wert kleiner 1 und einen x-Wert größer 1 in $f'(x)$ ein, wähle beispielsweise $x=0,9$ und $x=1,1$:

$f'(0,9)=(1-0,9^2)\cdot\mathrm{e}^{-0,5\cdot 0,9^2}\approx 0,127>0.$

Vor der möglichen Extremstelle $x_1=1$ ist die Steigung des Graphen von f also positiv.

Überprüfe nun noch, ob die Steigung nach der Stelle $x_1=1$ negativ ist:

$f'(1,1)=(1-1,1^2)\cdot\mathrm{e}^{-0,5\cdot 1,1^2}\approx -0,115<0.$

Hier liegt also tatsächlich ein Vorzeichen-Wechsel vor und damit hat der Graph von f bei $x_1=1$ einen Extrempunkt.

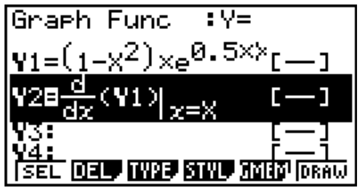
Du weißt bereits, dass der Graph von f punktsymmetrisch zum Ursprung verläuft. Das bedeutet: Wenn der Graph von f für positive x-Werte einen Extrempunkt besitzt, besitzt er in jedem Fall auch einen für negative x-Werte. Zusammen mit der Tatsache, dass es nur zwei mögliche Extrempunkte gibt, weißt du damit also nun, dass der Graph von f genau zwei Extrempunkte besitzt.

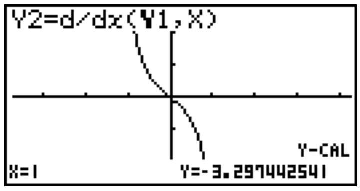
►► Lösungsweg B: GTR

Überprüfe nun, ob für die möglichen Extremstellen $x_1=1$ und $x_2=-1$ auch das hinreichende Kriterium erfüllt ist. Dies kannst du mit dem GTR tun, indem du dort zunächst die zweite Ableitung f'' von f definierst. f'' ist gleichzeitig die erste Ableitung von f'.

Gib also zuerst den Funktionsterm der ersten Ableitung f' von f im `GRAPH`-Menü ein und gib dann als zweiten Funktionsterm die erste Ableitung von f' ein.

Den Befehl für „Ableiten“ findest du unter `OPTN` → `CALC` → `F1`. Gib dort in die Klammer `Y1` für den Funktionsterm von f' ein. Wähle dazu das `Y`, das in der Leiste angezeigt wird und zeichne anschließend den Graphen von f''. Dort kannst du nun unter `F5(G-Solv)` → `F6` → `F2(Y-CAL)` $f''(x_1)$ und $f''(x_2)$ berechnen, indem du dort nacheinander $x_1 = 1$ und $x_2 = -1$ eingibst und jeweils mit `EXE` bestätigst.





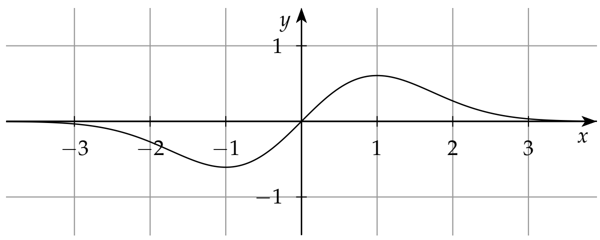
Du erhältst dann die Ergebnisse $f''(1) \approx -3{,}3 \neq 0$ und $f''(-1) \approx 3{,}3 \neq 0$. Somit weißt du nun, dass der Graph von f genau zwei Extrempunkte besitzt, da das notwendige und das hinreichende Kriterium für genau zwei Stellen erfüllt sind.

Mit dem notwendigen Kriterium für Extremstellen ergeben sich genau zwei mögliche Extremstellen von f. Mit dem hinreichenden Kriterium (Vorzeichen-Wechsel-Kriterium bzw. zweite Ableitung) bestätigen sich beide als tatsächliche Extremstellen. Daher besitzt der Graph von f genau zwei Extrempunkte.

► Zeigen, dass der Graph von f genau drei Wendepunkte besitzt

Du sollst nun begründen, dass der Graph von f genau drei Wendepunkte besitzt. Dies kannst du argumentativ tun. Du brauchst hier nicht zu rechnen.

Du weißt, dass der Graph von f genau zwei Extrempunkte besitzt. Zudem nähert sich der Graph für betragsmäßig sehr große x-Werte der x-Achse an. Ein Wendepunkt, ist ein Punkt, an dem der Graph einer Funktion sein Krümmungsverhalten ändert.



Stellst du dir einmal vor, der Graph von f würde eine Straße beschreiben, auf der du mit dem Fahrrad entlang fährst, dann ist ein Wendepunkt ein Punkt, an dem du von einer Linkskurve in eine Rechtskurve wechselst, oder umgekehrt. Zwischen zwei Kurven muss auch immer solch ein Punkt liegen.

Fährst du den Graphen von f von „links nach rechts“ entlang, so fährst du zuerst eine Rechtskurve. Anschließend folgt im Tiefpunkt eine Linkskurve. Zwischen diesen beiden Stellen befindet sich **der erste Wendepunkt**.

Anschließend folgt eine Rechtskurve im Hochpunkt des Graphen. Davor befindet sich **der zweite Wendepunkt**.

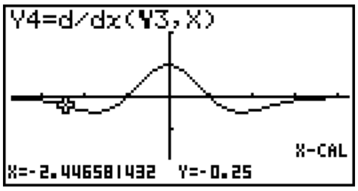
Nun nähert sich der Graph wieder der x-Achse an. Hier folgt nun eine Linkskurve und damit auch hiervor **der dritte Wendepunkt**.

Insgesamt muss der Graph von f also genau drei Wendepunkte besitzen.

▶ Stellen von f mit Tangentensteigung $-\frac{1}{4}$ bestimmen

Du sollst die Stellen von f bestimmen, für die die Tangenten an den Graphen von f die Steigung $-\frac{1}{4}$ besitzen. Wie du aus Aufgabenteil a) bereits weißt, besitzen Tangenten an den Graphen einer Funktion f in einem Punkt P dieselbe Steigung wie der Graph im Punkt P. Das bedeutet, du suchst nun die Stellen von f in denen der Graph von f die Steigung $m = -\frac{1}{4}$ besitzt. Zudem weißt du, dass die Steigung des Graphen von f durch die erste Ableitung f' beschrieben wird. Du suchst also die Stellen von f für die gilt $f'(x) = -\frac{1}{4}$. Dies sind die Schnittpunkte des Graphen von f' mit der Geraden $y = -\frac{1}{4}$

Diese kannst du wie oben mit dem GTR bestimmen.
Du erhältst dann die Ergebnisse:
$x_1 \approx -2{,}45$, $x_2 \approx -1{,}24$, $x_3 \approx 1{,}24$ und $x_4 \approx 2{,}45$.
Die Stellen von f, für die die Tangenten an den Graphen von f die Steigung $m = -\frac{1}{4}$ besitzen liegen bei $x_1 \approx -2{,}45$, $x_2 \approx -1{,}24$, $x_3 \approx 1{,}24$ und $x_4 \approx 2{,}45$.



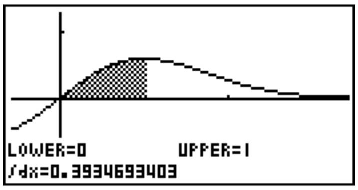
c) **▶ Höhenzuwachs im ersten Monat berechnen** (15P)

Du sollst berechnen, wie viele cm die Pflanze im ersten Monat gewachsen ist.

Die Funktion f beschreibt, wie viel Höhe die Pflanze zu jedem Zeitpunkt gewinnt. Der gesamte Höhenzuwachs ist die Summe von allen Zeitpunkten des Wachstums. Du müsstest also alle y-Werte bis zum gesuchten Zeitpunkt addieren. Diese Summe der y-Werte entspricht zugleich dem Flächeninhalt zwischen dem Graphen von f und der x-Achse bis zum gegebenen x-Wert.

Den Flächeninhalt zwischen dem Graphen von f und der x-Achse berechnest du hier über ein Integral.

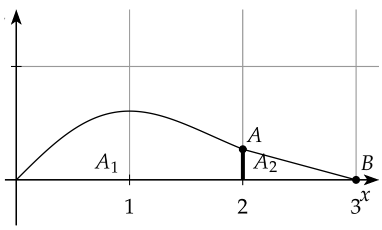
Gesucht ist hier das Integral über f in den Grenzen $a = 0$ und $b = 1$, da du die gesamte Höhe berechnen möchtest, die die Pflanze seit dem Beginn der Beobachtung bis einen Monat danach gewonnen hat. Es ergibt sich das Integral :
$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$
Dieses Integral kannst du mit dem GTR berechnen.
Lass dir dazu wieder den Graphen von f anzeigen. Unter $\boxed{\texttt{F5(G-Solv)} \rightarrow \texttt{F6} \rightarrow \texttt{F3}}$ kannst du den Wert des Integrals berechnen. Gib dort zuerst die untere ($a = 0$) und anschließend die obere ($b = 1$) Grenze des Integrals ein und bestätige mit `EXE`.



Der GTR liefert dir dann das Ergebnis:
$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \approx 0{,}39.$$
Die Pflanze wächst im ersten Monat ca. $0{,}39$ m.

▶ Höhe der Pflanze nach drei Monaten berechnen

Du sollst die Höhe der Pflanze nach drei Monaten berechnen, wenn sie zu Beginn der Beobachtung 2 cm hoch war. Du weißt bereits, dass der Höhenzuwachs der Pflanze bis zum Zeitpunkt t dem Inhalt der Fläche unter dem Graphen von f entspricht.



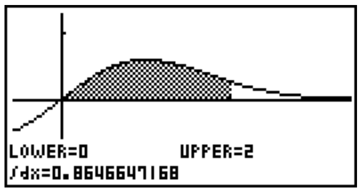
Da der Graph von f allerdings das Wachstum der Pflanze nur in den ersten zwei Monaten beschreibt und ihr Wachstum dann linear abnimmt, entspricht die Höhe der Pflanze nach drei Monaten dem Inhalt der Fläche, die von dem Graphen von f, der Geraden durch A und B und der x-Achse eingeschlossen wird, addiert zu den 2 cm, der Anfangshöhe.

Die Fläche kannst du in zwei Teilflächen aufteilen, um ihren Inhalt zu berechnen:

- A_1: Der Inhalt der Fläche unter dem Graphen von f vom Zeitpunkt $x_1 = 0$ bis $x_2 = 2$ ist der Höhenzuwachs der Pflanze nach zwei Monaten.
- A_2: Der Flächeninhalt des Dreiecks unter der Geraden vom Zeitpunkt $x_2 = 2$ bis zum Ende der drei Monate $x_3 = 3$. Die Gerade beginnt bei $x_2 = 2$. Der obere Punkt A hat also die Koordinaten $A(2 \mid f(2))$. Der Punkt B liegt an der Nullstelle der Geraden und hat die Koordinaten $B(3 \mid 0)$.

Damit ergibt sich dann für die Höhe h_P der Pflanze nach 3 Monaten: $h_P = 0{,}02 + A_1 + A_2$.

1. Schritt: A_1 berechnen

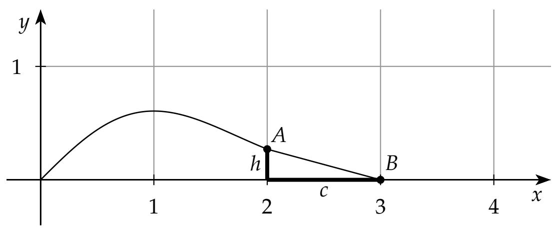


Wie du A_1 berechnest weißt du bereits aus dem vorigen Aufgabenteil. Du kannst dies wieder mit dem GTR tun. Damit ergibt sich dann das Ergebnis:
$A_1 = \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x \approx 0{,}86$.

2. Schritt: A_2 berechnen

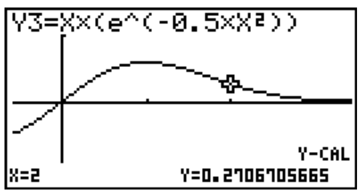
Du weißt, dass die Fläche ein Dreieck ist. Den Flächeninhalt eines Dreiecks kannst du allgemein über folgende Formel berechnen:
$A = \frac{1}{2} \cdot h \cdot c$,

wobei c die Grundseite des Dreiecks bezeichnet und h die Höhe des Dreiecks, welche senkrecht auf c steht und c mit dem gegenüberliegenden Eckpunkt des Dreiecks verbindet.
Demnach gilt für $c = 3 - 2 = 1$ und $h = f(2)$.



In diesem Fall gilt nun, was du auf der Abbildung rechts sehen kannst und damit auch: $A_2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot f(2)$.

$f(2)$ kannst du mit dem GTR berechnen. Zeichne dazu wieder den Graphen von f im GTR. Unter `F5(G-Solv)` → `F6` → `F1(Y-CAL)` kannst du anschließend $x = 2$ eingeben und mit `EXE` bestätigen. Dann erhältst du das Ergebnis : $f(2) \approx 0{,}27$.
Damit kannst du nun auch A_2 berechnen:
$A_2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 0{,}27 = 0{,}135$.



Damit ergibt sich dann insgesamt für die Höhe der Pflanze nach drei Monaten:

$h_P = 0{,}02 + 0{,}86 + 0{,}135 \approx 1{,}02$.

Nach drei Monaten ist die Pflanze ca. $1{,}02$ m hoch.

▶ Zeigen, dass F eine Stammfunktion von f ist

Du sollst zeigen, dass die Funktion F mit $F(x) = c - \mathrm{e}^{-0,5\cdot x^2}$ eine Stammfunktion von f ist. F ist eine Stammfunktion von f, wenn f die erste Ableitung von F ist. Für eine Stammfunktion F der Funktion f muss also gelten : $F'(x) = f(x)$.

Du kannst also zeigen, dass F eine Stammfunktion von f ist, indem du F ableitest. Bei F handelt es sich um eine **verkettete Funktion**. Leite daher nach der **Kettenregel** ab.

c ist eine Konstante, die beim Ableiten wegfällt. Für F' ergibt sich damit:

$$\begin{aligned} F'(x) &= (c - \mathrm{e}^{-0,5\cdot x^2})' \\ &= -(-0,5\cdot 2\cdot x)\cdot \mathrm{e}^{-0,5\cdot x^2} && \text{zusammenfassen} \\ &= x\cdot \mathrm{e}^{-0,5\cdot x^2} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Es gilt $F'(x) = f(x)$. Damit ist F eine Stammfunktion von f.

▶ Vorgehen bei der Berechnung des Höhenzuwachses beschreiben

Du sollst beschreiben, wie sich mit Hilfe der Funktion F der Höhenzuwachs der Pflanze zwischen zwei Zeitpunkten t_1 und t_2 im Intervall $[0; 2]$ berechnen lässt.

Du weißt bereits, dass sich der Höhenzuwachs der Pflanze zwischen zwei Zeitpunkten t_1 und t_2 über das Integral berechnen lässt: $h_P = \int_{t_1}^{t_2} f(x)\mathrm{d}x$.

Zuvor hast du das Integral mit dem GTR berechnet. Mit Hilfe einer Stammfunktion F von f kannst du dieses Integral aber auch handschriftlich über den Hauptsatz der Integralrechnung berechnen. Dann gilt:

$$\int_{t_1}^{t_2} f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_{t_1}^{t_2} = F(t_2) - F(t_1).$$

Der Höhenzuwachs der Pflanze zwischen zwei Zeitpunkten t_1 und t_2 im Intervall $[0; 2]$ ist das Integral $\int_{t_1}^{t_2} f(x)\mathrm{d}x$ und lässt sich folgendermaßen mit Hilfe der Funktion F bestimmen:

$$\int_{t_1}^{t_2} f(x)\mathrm{d}x = F(t_2) - F(t_1).$$