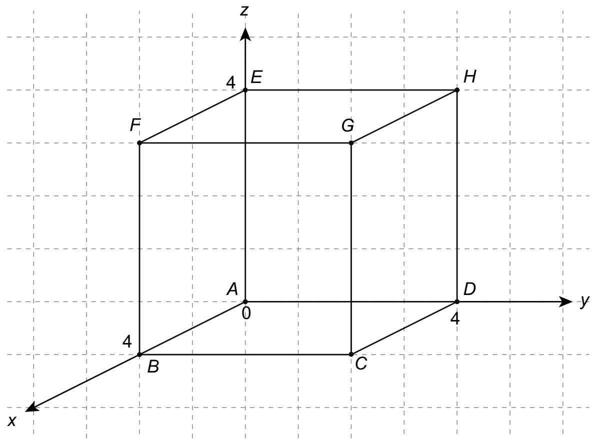
a) **► Koordinaten der Eckpunkte C und D angeben** (11P)

Du sollst die Koordinaten der Eckpunkte C und D angeben. Auf der Abbildung kannst du erkennen, wo diese liegen sollen. Du kannst sehen, dass der Punkt $A(0 \mid 0 \mid 0)$ im Ursprung des Koordinatensystems liegt, und $B(4 \mid 0 \mid 0)$ durch Verschiebung des Punktes A um 4 Einheiten entlang der positiven x-Achse entsteht. Demnach sind die Kanten des Würfels 4 LE lang.



Die Koordinaten des Punktes C erhältst du nun, indem du den Punkt $B(4 \mid 0 \mid 0)$ um 4 Einheiten entlang der positiven y-Achse verschiebst. Dazu musst du nur die y-Koordinate um 4 erhöhen. Damit ergibt sich dann:

$C(4 \mid 4 \mid 0)$.

Die Koordinaten des Punktes D erhältst du nun auf ähnliche Weise, indem du den Punkt A um 4 Einheiten entlang der positiven y-Achse verschiebst:

► Korrektheit der Geradengleichung zeigen

Du sollst nun zeigen, dass die Gerade g durch die Punkte A und H durch

$g_1 : \vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ beschrieben wird.

Eine Geradengleichung hat im Allgemeinen folgende Form:
$g : \overrightarrow{x} = \overrightarrow{p} + t \cdot \overrightarrow{r}$, wobei:

- $\overrightarrow{p}$ der Stützvektor, der Ortsvektor des Aufpunktes ist. Der Aufpunkt ist ein beliebiger Punkt auf der Geraden und gibt die Lage der Geraden im Raum an.
- $\overrightarrow{r}$ der Richtungsvektor ist. Dieser gibt die Richtung der Geraden an und ist ein Vielfaches der Differenz der Ortsvektoren zweier Punkte auf der Geraden.

Gehe nun wie folgt vor:

1. Aufstellen einer Geradengleichung der Gerade g durch die Punkte A und H.
2. Überprüfen, ob diese mit g_1 übereinstimmt.

Vervielfältigung nur innerhalb einer Lehrer-/Klassen- oder Schullizenz und mit Hinweis auf MatheLV erlaubt.

► Zeigen, dass die Gerade g_2 durch den Mittelpunkt der Seite $\overline{FG}$ verläuft

Du sollst nun zeigen, dass die Gerade g_2 durch den Mittelpunkt der Seite $\overline{FG}$ verläuft. Die Gerade g_2 ist gegeben durch $g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Du kannst nun wie folgt vorgehen:

1. Berechne die Koordinaten des Mittelpunkts M_{FG} der Strecke $\overline{FG}$ mit Hilfe der Mittelpunktsformel.
2. Überprüfe mittels einer Punktprobe, ob M_{FG} auf der Geraden g_2 liegt.

► Lagebeziehung untersuchen

Du sollst die Lagebeziehung zwischen den Geraden g_1 und g_2 untersuchen. Die Geraden g_1 und g_2 sind dir aus den vorigen Aufgabenteilen gegeben mit:

- $g_1 : \vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Zwei Geraden g und h können folgende Lagebeziehungen aufweisen:

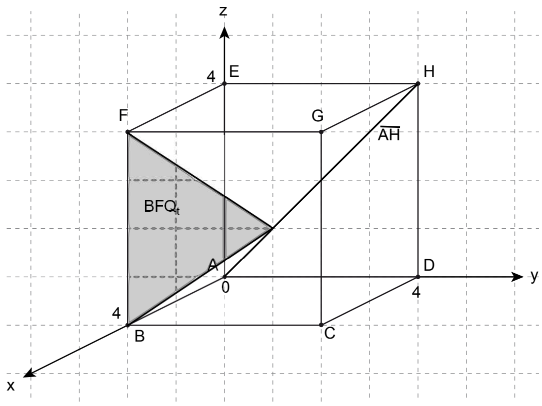
- **windschief**: Die Geraden sind weder parallel zueinander noch schneiden sie sich.
- **identisch**: Die beiden Geraden sind parallel und besitzen gemeinsame Punkte.
- **parallel**aber, **nicht identisch**: Die beiden Geraden verlaufen in die selbe Richtung. Der Richtungsvektor von h ist ein Vielfaches des Richtungsvektors von g: $\overrightarrow{r_h} = a \cdot \overrightarrow{r_g}$. Die beiden Geraden besitzen keine gemeinsamen Punkte.
- **sie schneiden sich**: Die Geraden sind nicht parallel, haben aber einen gemeinsamen Punkt.

Prüfe die Geraden g_1 und g_2 zunächst auf Parallelität und anschließend auf gemeinsame Punkte.

Vervielfältigung nur innerhalb einer Lehrer-/Klassen- oder Schullizenz und mit Hinweis auf MatheLV erlaubt.

b) ► **Zeigen, dass das Dreieck gleichschenklig, aber nicht gleichseitig ist** (11P)

Durch die drei Punkte B, F und Q_t ist immer ein Dreieck gegeben. Du sollst zeigen, dass das Dreieck BFQ_t für $t = 2$ gleichschenklig, aber nicht gleichseitig ist. Dabei beschreibt für $0 \leq t \leq 4$ die Gleichung von g_1 alle Punkte Q_t auf der Strecke $\overline{AH}$.



Ein Dreieck ist genau dann gleichschenklig, wenn zwei der drei Seiten die selbe Länge besitzen. Besitzen alle drei Seiten des Dreiecks die gleiche Länge, so ist das Dreieck gleichseitig.

In diesem Fall wird das Dreieck von Vektoren gebildet. Die Länge eines Vektors entspricht seinem Betrag, den du mit dem `norm`-Befehl des CAS berechnen kannst.

Um zu überprüfen, ob ein gleichschenkliges bzw, gleichseitiges Dreieck vorliegt, kannst du wie folgt vorgehen:

1. Bestimme die Kantenvektoren des Dreiecks BFQ_2.
2. Berechne die Länge der Seiten über den Betrag der Kantenvektoren.

► **Dreieck und Höhe in das Koordinatensystem einzeichnen**

Du sollst das Dreieck BFQ_2 in das Koordinatensystem einzeichnen. Trage dazu zunächst den Punkt $Q_2(0 \mid 2 \mid 2)$ ein. Die Punkte B und F sind bereits eingetragen. Verbinde anschließend die Punkte miteinander.

► **Höhe in das Koordinatensystem einzeichnen**

Du sollst die Höhe h zur Seite $\overline{BF}$ des Dreiecks BFQ_2 in das Koordinatensystem einzeichnen.

Die Höhe zu einer Seite $\overline{AB}$ eines Dreiecks ABC ist das Lot, das die Seite $\overline{AB}$ mit dem gegenüberliegenden Punkt C verbindet. Sie steht also senkrecht auf der Seite $\overline{AB}$.

Die Höhe h zur Seite $\overline{BF}$ in dem Dreieck BFQ_2 steht also senkrecht auf der Dreiecksseite $\overline{BF}$ und verbindet diese Seite mit dem gegenüberliegenden Punkt Q_2. Du weißt, dass die Seiten $\overline{FQ_2}$ und $\overline{Q_2B}$ die gleiche Länge besitzen. Damit ist das Dreieck achsensymmetrisch zur Höhe h. Demnach ist h genau die Strecke zwischen dem Mittelpunkt von $\overline{BF}$ und dem Punkt Q_2. Da die Seite $\overline{BF}$ eine Kante des Würfels ist, kannst du den Mittelpunkt geometrisch ermitteln.

► **Begründen, dass die Dreiecke nicht alle in derselben Ebene liegen.**

Du sollst begründen, dass die Dreiecke BFQ_t für verschiedene Werte von t nicht alle in derselben Ebene liegen. Berechne dazu für zwei verschiedene Werte von t die Koordinaten des Punkts Q_t und betrachte anschließend die Lage der jeweiligen Dreiecke.

Vervielfältigung nur innerhalb einer Lehrer-/Klassen- oder Schullizenz und mit Hinweis auf MatheLV erlaubt.