

(1) ▶ Angeben der Koordinaten der Eckpunkte des Dachs

(8 BE)

Die Koordinaten der Eckpunkte des Dachs bestimmst du, indem du die Angaben der Aufgabenstellung sorgfältig auswertest.

An der Nordseite der Lagerhalle ist das Dach insgesamt 20 m hoch, der Zeichnung der Aufgabenstellung kannst du entnehmen, dass sich der Punkt D in positiver x_3 - Richtung oberhalb des Ursprungs befindet. Dieser hat demnach die Koordinaten:

$$D(0 \mid 0 \mid 20)$$

Das Dach hat insgesamt eine Länge von 30 m, das heißt, dass Punkt H auf gleicher Höhe insgesamt 30 Einheiten in positiver x_1 - Richtung vom Punkt D entfernt ist.

Dieser hat demnach die Koordinaten:

$$H(30 \mid 0 \mid 20)$$

Das Dach ist 10 m breit und auf der Südseite der Lagerhalle hat es eine Höhe von 15 m. Punkt C ist Eckpunkt der Lagerhalle an dessen Südseite. C liegt 15 Einheiten in positiver x_3 - Richtung oberhalb der x_2 - Achse und repräsentiert mit einer x_2 - Koordinate von 15 die Breite des Dachs.

Koordinaten von C :

$$C(0 \mid 10 \mid 15)$$

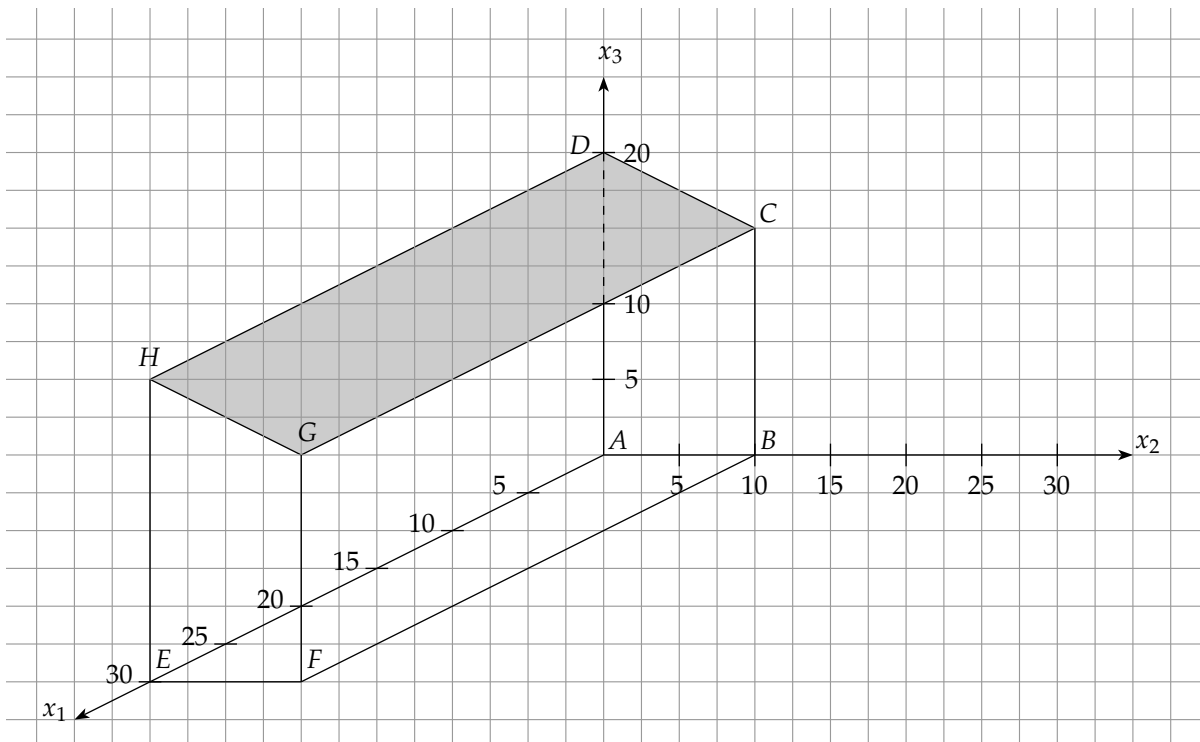
Punkt G verhält sich zu Punkt C wie zuvor Punkt H zu Punkt D .

Dessen Koordinaten sind demnach:

$$G(30 \mid 10 \mid 15)$$

(2) ▶ Ergänzen der Zeichnung

Ergänze nun mit Hilfe der Koordinaten der Eckpunkte des Dachs die Skalen der jeweiligen Achsen. Du solltest die gegebene Zeichnung wie folgt ergänzen:



(3) ► Berechnen des Flächeninhalts

Den Flächeninhalt A_{Dach} der Dachfläche berechnet sich über die Flächenformel für Rechtecke. Bevor du diesen Flächeninhalt jedoch bestimmen kannst, berechnest du die Länge und Breite der Dachfläche.

Der Aufgabenstellung kannst du entnehmen, dass die Dachfläche eine Länge von 30 m hat. Die Breite der Dachfläche berechnest du, indem du den Abstand zwischen den Punkten D und C oder H und G berechnest. Hier wird beispielsweise der Abstand zwischen D und C über den Betrag des dazwischen liegenden Vektors berechnet:

$$\text{Breite} = |\overrightarrow{CD}| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ -5 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{0^2 + 10^2 + (-5)^2} = \sqrt{125} = 11,18 \text{ m}$$

Flächeninhalt A_{Dach} der Dachfläche:

$$A = \text{Länge} \cdot \text{Breite}$$

$$A = 30 \text{ m} \cdot 11,18 \text{ m}$$

$$A = 335,4 \text{ m}^2$$

Der Flächeninhalt des Dachs ist $335,4 \text{ m}^2$.

b) (1) ► Bestimmen einer Gleichung der Ebene in Parameterform

(8 BE)

Die Parameterform einer Ebene besteht aus einem Aufpunkt und zwei Spannvektoren. Als Aufpunkt könntest du hier beispielsweise den Punkt $D(0 | 0 | 20)$ wählen.

Die Spannvektoren bildest du mit Punkten, welche in der Ebene liegen. Wähle hier zum Beispiel den Vektor zwischen D und H , sowie den Vektor zwischen D und C als Spannvektor deiner Ebenengleichung:

$$\overrightarrow{DH} = \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \hat{=} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ -5 \end{pmatrix} \hat{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Eine Parameterform der Ebene E_{Dach} könnte also so aussehen:

$$E_{\text{Dach}} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(2) ► Bestimmen einer Gleichung der Ebene in Koordinatenform

Willst du eine Gleichung der Ebene in Koordinatenform bestimmen, so bildest du den Normalenvektor der Ebene. Dieser Normalenvektor \vec{n} steht senkrecht auf den beiden Richtungsvektoren der Ebene in Parameterform. Steht ein Vektor senkrecht auf einem anderen Vektor, so ist deren Skalarprodukt gleich null.

Hier gilt also:

$$\vec{n} \circ \overrightarrow{DH} = 0 \text{ und } \vec{n} \circ \overrightarrow{DC} = 0$$

Bildest du die Skalarprodukte des noch unbekanntes Normalenvektors \vec{n} und den Richtungsvektoren der Ebene, ergibt sich folgendes unterbesetztes Gleichungssystem:

$$\text{I } 30 \cdot n_1 + 0 \cdot n_2 + 0 \cdot n_3 = 0$$

$$\text{II } 0 \cdot n_1 + 2 \cdot n_2 - 1 \cdot n_3 = 0$$

Aus Gleichung I ergibt sich direkt: $n_1 = 0$.

Betrachten der zweiten Gleichung:

$$0 \cdot n_1 + 2 \cdot n_2 - 1 \cdot n_3 = 0$$

$$2 \cdot n_2 - n_3 = 0 \quad | +n_3$$

$$2 \cdot n_2 = n_3$$

Die von dir nun bestimmte Zeile sagt aus, das der zweite Zeileneintrag des Vektors das doppelte des dritten Eintrags sein muss. Einen Normalenvektor bestimmst du jetzt, indem du für n_2 und n_3 eine gleiche Zahl einsetzt:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Eine Koordinatengleichung einer Ebene hat diese Grundform:

$$n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 = b$$

Einsetzen der Einträge des Normalenvektors:

$$x_2 + 2 \cdot x_3 = b$$

Die rechte Seite der Koordinatengleichung der Ebene E_{Dach} bestimmst du, indem du einen Punkt, welcher sich auf der Ebene befindet, in diese Gleichung einsetzt. Hier wird zum Beispiel der Aufpunkt $D(0|0|20)$ in die Koordinatengleichung eingesetzt:

$$0 + 2 \cdot 20 = b$$

$$b = 40$$

Die Koordinatengleichung der Ebene E_{Dach} ist demnach:

$$E_{\text{Dach}} : x_2 + 2 \cdot x_3 = 40$$

c) (1) ► **Bestimmen des Schattenpunkts auf der Dachfläche**

(10 BE)

Aus der Aufgabenstellung geht hervor, dass bei $Q(10|30|0)$ eine 23 m hohe Antenne errichtet werden soll. Deine Aufgabe ist es hier zu bestimmen, an welchem Punkt die Antennenspitze durch die Sonnenstrahlen auf die Dachfläche $CDGH$ projiziert wird.

Da dir bekannt ist, in welcher Richtung die Sonnenstrahlen einfallen, kannst du eine Gerade definieren, welche dir angibt, an welchem Punkt sich der Schatten der Antennenspitze befindet. Nimm dazu den Punkt Q' der Antennenspitze als Aufpunkt der Geraden.

Die Koordinaten von Q' sind:

$$Q'(10|30|23)$$

Als Richtungsvektor der Geraden dient der in der Aufgabenstellung angegebene Richtungsvektor \vec{v} der Sonnenstrahlen. Die Gerade h der Sonnenstrahlen durch die Antennenspitze ist demnach:

$$h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 23 \end{pmatrix} + q \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ob und wo die Sonnenstrahlen auf die Dachfläche treffen bestimmst du, indem du die Gerade h als Vektor in Abhängigkeit des Parameters q umformst und diesen Vektor danach in die Koordinatengleichung der Ebene E_{Dach} einsetzt.

Gerade h als Vektor in Abhängigkeit von q :

$$h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 23 \end{pmatrix} + q \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 + 2 \cdot q \\ 30 - 4 \cdot q \\ 23 - q \end{pmatrix}$$

Einsetzen des eben bestimmten Vektors in die Ebenengleichung E_{Dach} in Koordinatenform:

$$\begin{aligned} (30 - 4 \cdot q) + 2 \cdot (23 - q) &= 40 \\ 30 - 4 \cdot q + 46 - 2 \cdot q &= 40 \\ -6 \cdot q + 76 &= 40 && | -76 \\ -6 \cdot q &= -36 && | :(-6) \\ q &= 6 \end{aligned}$$

Damit hast du gezeigt, dass der Schatten der Antennenspitze die Ebene, in welcher auch die Dachfläche liegt, trifft.

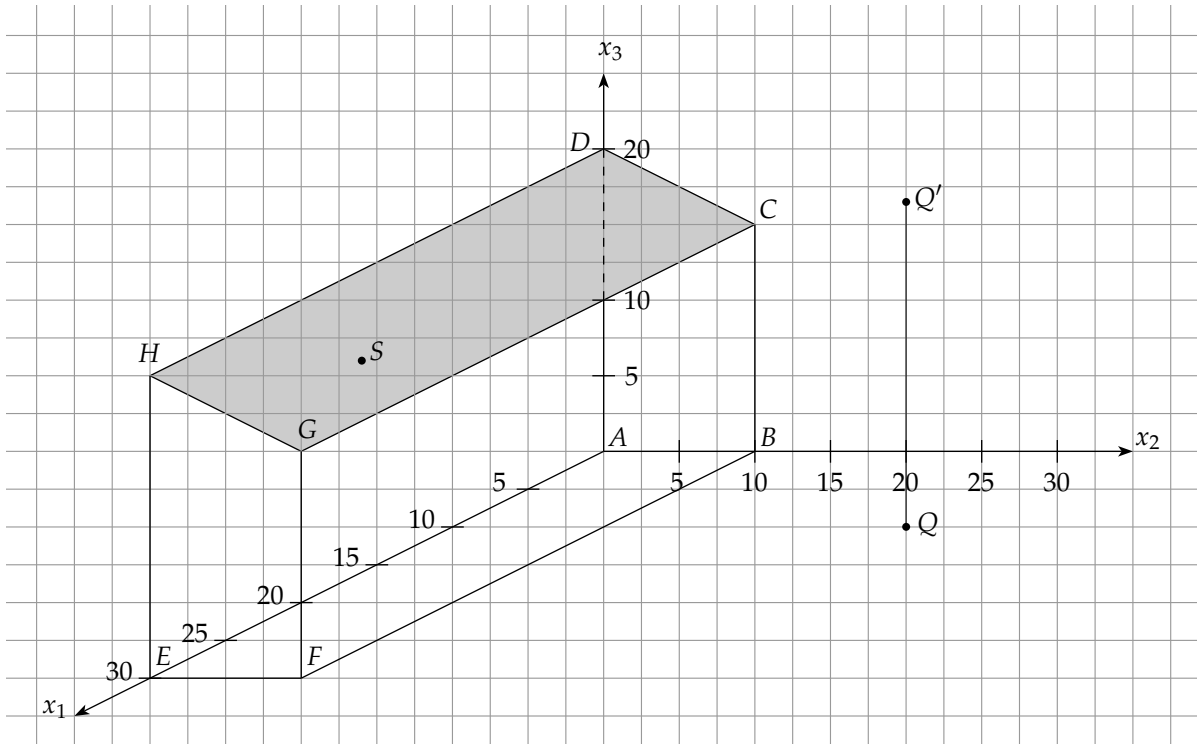
Um nun zu bestimmen, in welchem Punkt der Schatten auf die Ebene trifft, setzt du den eben bestimmten Wert für q in die Geradengleichung h der Sonnenstrahlen ein:

$$h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 23 \end{pmatrix} + 6 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 30 \\ 23 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 \\ -24 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ 6 \\ 17 \end{pmatrix}$$

Der Schatten der Antennenspitze trifft im Punkt $S(22 | 6 | 17)$ auf die Ebene und liegt demnach ebenfalls in der Dachfläche.

(2) ► **Einzeichnen der Antenne und des Schattenpunkts**

Ergänze deine Zeichnung wie folgt:



d) (1) ► **Analysieren der geometrischen Zusammenhänge**

(4 BE)

(1) Ebene E_2 :

Der Aufpunkt der Ebene E_2 entspricht dem Fußpunkt Q der Antenne. Der erste Vektor der Ebene E_2 zeigt in positive x_3 - Richtung und steht senkrecht auf der x_1x_2 Ebene, der zweite Richtungsvektor der Ebene repräsentiert den Einfall der Sonnenstrahlen (Vektor \vec{v} aus Aufgabenteil c).

Die Ebene gibt also die Fläche an, welche die Sonnenstrahlen, in Abhängigkeit der Antennenmasthöhe, abdeckt.

(2) Gerade g :

Der Aufpunkt der Geraden g ist der Punkt C . Der Richtungsvektor der Geraden zeigt in Richtung der x_1 - Achse.

Die Gerade g repräsentiert also die Dachkante an der Südseite des Dachs.

(3) Punkt P :

Der Aufgabenstellung kannst du entnehmen, dass Punkt P der Schnittpunkt von Geraden g und Ebene E_2 ist. Punkt P ist also ein Schattenpunkt, welcher von einer Antennenspitze mit unbekannter Höhe auf die Dachkante \overline{CG} geworfen wird.

Betrachtest du nun den gesamten Schattenverlauf des Schattens der Antenne, so macht dieser am Punkt P einen Knick. Nach oben hin, verläuft der Schatten in Richtung des Punktes S , welchen du im vorherigen Aufgabenteil in die Zeichnung eingetragen hast, nach unten hin, verläuft der Schatten senkrecht bis zur unteren Hauskante (\overline{BF}) der Lagerhalle (Punkt P'). Von da an verläuft der Schatten zum Fußpunkt der Antenne bei Q .

(2) ► **Vervollständigen des Schattenverlaufs**

Vervollständige mit den oben gegebenen Informationen den Schattenverlauf der Antenne.

Diesen solltest du so in die Zeichnung eintragen:

