a) ▶ **Koordinaten des Schnittpunktes bestimmen** (9P)

Gesucht ist der Schnittpunkt der Geraden g mit der x-y-Ebene. Alle Punkte in dieser Ebene haben die z-Koordinate $z = 0$ und besitzen somit allgemein die Koordinaten $S\,(x \mid y \mid 0)$. Du kannst diese Koordinaten in die Geradengleichung von g einsetzen und die dritte Zeile nach dem Parameterwert für r auflösen. Setze anschließend diesen Wert wieder in die Geradengleichung von g ein und du erhältst die Koordinaten von S.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Aus der letzten Zeile ergibt sich:

$$\begin{aligned} 0 &= 1 + r \cdot (-1) \\ 0 &= 1 - r \qquad \mid +r \\ r &= 1 \end{aligned}$$

Setze $r = 1$ ein in die Geradengleichung von g und erhalte so die Koordinaten von S:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OS} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 + 4 \\ 3 + 0 \\ 1 - 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die Gerade g durchstößt die x-y-Ebene im Punkt $S\,(4 \mid 3 \mid 0)$.

▶ **Abstand von S vom Koordinatenursprung angeben**

Der Koordinatenursprung hat die Koordinaten $O\,(0 \mid 0 \mid 0)$. Du sollst den Abstand des Punktes S vom Punkt O berechnen. Für den Abstand d zweier Punkte $P(p_1 \mid p_2 \mid p_3)$ und $Q\,(q_1 \mid q_2 \mid q_3)$ gilt allgemein:

$$d = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2 + (p_3 - q_3)^2}.$$

Einsetzen der Koordinaten von S und O ergibt:

$$\begin{aligned} d(S\,;O) &= \sqrt{(4-0)^2 + (3-0)^2 + (0-0)^2} \\ &= \sqrt{4^2 + 3^2} \\ &= \sqrt{16 + 9} \\ &= \sqrt{25} = 5 \end{aligned}$$

Der Schnittpunkt S der Geraden g mit der x-y-Ebene ist 5 LE vom Koordinatenursprung entfernt.

▶ Größe des Schnittwinkels von g mit der x-y-Ebene berechnen

Die Gerade g schließt mit der x-y-Ebene einen Winkel α ein. Der Winkel wird also von einer Geraden und einer Ebene eingeschlossen. Für einen Winkel α zwischen einer Geraden und einer Ebene gilt allgemein:

$$\sin(\alpha) = \frac{|\vec{n}\cdot\vec{v}|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{v}|},$$

wobei $\vec{n}$ der Normalenvektor der Ebene und $\vec{v}$ der Richtungsvektor der Geraden ist. Den Richtungsvektor der Geraden g erhältst du aus der Geradengleichung von g: $\vec{v} = \begin{pmatrix}4\\0\\-1\end{pmatrix}$. Den Normalenvektor der x-y-Ebene kennst du: $\vec{n} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

Einsetzen dieser Vektoren in die Gleichung liefert:

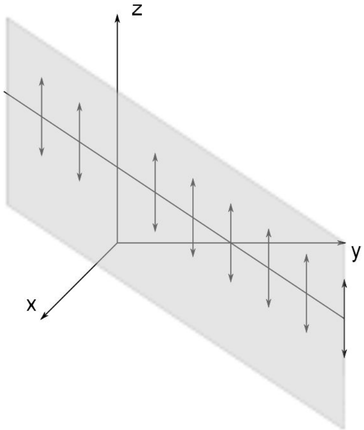
$$\begin{aligned}\sin(\alpha) &= \frac{\left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\0\\-1\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}4\\0\\-1\end{pmatrix}\right|}\\ &= \frac{|0\cdot4+0\cdot0+1\cdot(-1)|}{\left|\sqrt{0^2+0^2+1^2}\cdot\sqrt{4^2+0^2+(-1)^2}\right|}\\ &= \frac{|-1|}{\left|1\cdot\sqrt{16+1}\right|}\\ &= \frac{1}{\left|\sqrt{17}\right|}\end{aligned}$$

Für den Winkel α folgt dann:
$\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right) \approx 14,04\,°$.
Die Gerade g schließt mit der x-y-Ebene einen Winkel von etwa 14,04 ° ein.

b) **▶ Lage der Ebene E im Koordinatensystem beschreiben** (12P)

Eine Parametergleichung der Ebene E ist dir in der Aufgabenstellung mit

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix}0,7\\18\\9\end{pmatrix} + k\begin{pmatrix}2\\5\\0\end{pmatrix} + l\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \text{ gegeben.}$$



Du kannst erkennen, dass der erste Spannvektor die z-Koordinate $z = 0$ hat. Außerdem ist der zweite Spannvektor der Normalenvektor der x-y-Ebene.
Der Stützvektor und der erste Spannvektor alleine würden also eine **Gerade** beschreiben, welche parallel zur x-y-Ebene verläuft.

Der zweite Spannvektor verläuft parallel zur z-Achse. Die Ebene E verläuft also insgesamt parallel zu z-Achse und damit senkrecht zur x-y-Ebene.

▶ Gleichung der Schnittgeraden von E und der x-y-Ebene ermitteln

Du weißt bisher:

- Die Ebene E verläuft senkrecht zur x-y-Ebene.
- Einer ihrer Spannvektoren, nämlich der erste, verläuft parallel zur x-y-Ebene.
- Die Schnittgerade s der Ebene E und der x-y-Ebene ist in der x-y-Ebene enthalten. Ihr Richtungsvektor muss also parallel zur x-y-Ebene verlaufen. Deshalb kannst du den ersten Spannvektor der Ebene E als Richtungsvektor für die Schnittgerade s verwenden.

Somit kennst du bereits den Richtungsvektor der gesuchten Gerade, nämlich $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$. Es fehlt noch der Stützvektor. Suche hierzu einen Punkt der Ebene E, der gleichzeitig in der x-y-Ebene liegt.
Alle Punkte in der x-y-Ebene haben die z-Koordinate $z = 0$ und besitzen somit allgemein die Koordinaten $S\,(x \mid y \mid 0)$. Setze diese allgemeinen Koordinaten ein in die Ebenengleichung von E und überlege, wie die Werte von k und l gewählt werden müssen:

$$E: \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 18 \\ 9 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aus der dritten Zeile folgt:

$$\begin{aligned} 0 &= 9 + k \cdot 0 + l \cdot 1 \\ 0 &= 9 + l \qquad \mid -9 \\ l &= -9 \end{aligned}$$

Damit weißt du: Für $l = 9$ ergibt sich ein Punkt mit z-Koordinate $z = 0$. Der Wert für k ist egal, weil der erste Spannvektor keinen Einfluss auf die z-Koordinate nimmt. Wähle also z.B. $k = 0$.
Mit diesen Parameterwerten ergibt sich der Punkt T mit

$$\overrightarrow{OT} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 18 \\ 9 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} - 9 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 18 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Du hast nun mit $T\,(0{,}5 \mid 18 \mid 0)$ einen Punkt gefunden, der sowohl in der Ebene E als auch in der x-y-Ebene liegt. Wähle ihn als Stützvektor der Schnittgeraden s. Sie hat dann die Gleichung

$$s: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 18 \\ 0 \end{pmatrix} + m \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

▶ Gleichung von E in Koordinatenform bestimmen

Die Koordinatenform der Ebenengleichung lautet allgemein

$E: ax + by + cz = d,$

wobei a, b und c die Koordinaten des Normalenvektors sind. Den Parameterwert für d kannst du zum Schluss mithilfe einer Punktprobe berechnen. Du kannst so vorgehen:

- Ermittle zunächst, z.B. über das Vektorprodukt der Spannvektoren, einen Normalenvektor der Ebene E.
- Setze dessen Koordinaten ein in die allgemeine Koordinatenform der Ebenengleichung.
- Wähle einen Punkt, der in der Ebene E liegt, und führe eine Punktprobe durch. Bestimme so den Wert für d.

1. Schritt: Normalenvektor der Ebene E bestimmen

Wir bieten zwei Möglichkeiten zur Bestimmung des Normalenvektors $\vec{n}$ der Ebene E an: eine Lösung über das Vektorprodukt der Spannvektoren (Lösungsweg A) und eine Lösung mithilfe des Skalarprodukts (Lösungsweg B).

►► Lösungsweg A: Lösung über das Vektorprodukt

Berechne einen Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene E über das Vektorprodukt der beiden Spannvektoren der Ebene. Du kannst sie der Parametergleichung von E entnehmen.

$$\begin{aligned}\vec{n} &= \begin{pmatrix}2\\5\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}5\cdot 1 & - & 0\cdot 0\\ 0\cdot 0 & - & 2\cdot 1\\ 2\cdot 0 & - & 5\cdot 0\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}5 & - & 0\\ 0 & - & 2\\ 0 & - & 0\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}5\\-2\\0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

►► Lösungsweg B: Lösung über das Skalarprodukt

Der Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix}$ steht senkrecht auf der Ebene E. Also steht er auch senkrecht auf jedem der beiden Spannvektoren von E. Deshalb muss das Skalarprodukt des Normalenvektors mit jedem dieser beiden Vektoren Null ergeben:

(1)
$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2\\5\\0\end{pmatrix} &= 0\\ n_1\cdot 2 + n_2\cdot 5 + n_3\cdot 0 &= 0\\ 2n_1 + 5n_2 + n_3\cdot 0 &= 0\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} &= 0\\ n_1\cdot 0 + n_2\cdot 0 + n_3\cdot 1 &= 0\\ n_3 &= 0\end{aligned}$$

Aus (2) folgt $n_3 = 0$. Setze dies ein in (1) und löse die Gleichung dann nach n_1 oder n_2 auf.

$$\begin{aligned} 2n_1 + 5n_2 + 0 &= 0 && \mid -5n_2 \\ 2n_1 &= -5n_2 && \mid :2 \\ n_1 &= -2,5n_2 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich zunächst allgemein für den Normalenvektor: $\vec{n} = \begin{pmatrix} -2,5n_2 \\ n_2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Beim Normalenvektor kommt es auf die **Richtung** und nicht auf die Länge an. Du kannst also einen beliebigen Wert für n_2 auswählen. Wir wählen den Wert $n_2 = -2$. So ergibt sich der Vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Einsetzen des Normalenvektors in die allgemeine Koordinatenform der Ebenengleichung ergibt zunächst:
$E : 5x - 2y = d$.

2. Schritt: Punktprobe zur Bestimmung von d durchführen

Wähle einen Punkt aus, der in der Ebene E liegt und setze dessen Koordinaten in die Koordinatenform der Ebenengleichung von E ein. Löse dann nach d auf. Wir wählen den Punkt $(0,5 \mid 18 \mid 9)$; du kennst ihn aus der Parametergleichung von E.

$5 \cdot 0,5 - 2 \cdot 18 = 2,5 - 36 = -33,5 = d$

Für die Koordinatenform der Ebenengleichung ergibt sich: $E : 5x - 2y = -33,5$.

▶ Lagebeziehung von h und E untersuchen

Auch die Gleichung der Geraden h ist dir zu Beginn in der Aufgabenstellung gegeben. Du sollst untersuchen, wie die Gerade h und die Ebene E zueinander liegen, d.h., ob sie sich schneiden, ob sie parallel verlaufen oder ob die Gerade h in der Ebene E enthalten ist. Du kannst so vorgehen:

- Untersuche zunächst, ob die Gerade h parallel zur Ebene E verläuft. Dies ist der Fall, wenn der Normalenvektor der Ebene E senkrecht zum Richtungsvektor der Geraden h verläuft. Berechne also das Skalarprodukt der beiden Vektoren. Wenn es Null ergibt, so verlaufen h und E parallel.
- Falls die Gerade und die Ebene parallel sind, untersuche nun mithilfe einer Punktprobe, ob h in E enthalten ist oder ob sie echt parallel verlaufen.
- Falls die Gerade und die Ebene nicht parallel sind, dann schneiden sie sich in einem Punkt. Diesen kannst du berechnen, indem du die Geradengleichung von h in die drei Zeilen $x = \ldots, y = \ldots$ und $z = \ldots$ aufteilst und dann in die Koordinatengleichung von E einsetzt. Löse die so entstehende Gleichung nach s auf und bestimme dann den Schnittpunkt der Geraden h und der Ebene E.

1. Schritt: Gerade und Ebene auf Parallelität prüfen

Eine Gerade und eine Ebene verlaufen parallel, wenn der Normalenvektor der Ebene und der Richtungsvektor der Geraden senkrecht aufeinander stehen. Dies ist wiederum der Fall, wenn das Skalarprodukt der beiden Vektoren Null ergibt. Den Normalenvektor der Ebene E hast du soeben berechnet: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Den Richtungsvektor $\vec{w}$ der Geraden h kannst du der Gleichung von h entnehmen: $\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Für das Skalarprodukt der beiden Vektoren ergibt sich:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} &= 5 \cdot 0 + (-2) \cdot 2 + 0 \cdot 1 \\ &= 0 - 4 + 0 = -4 \neq 0 \end{aligned}$$

Das Skalarprodukt der beiden Vektoren ist nicht Null. Also verlaufen die Gerade h und die Ebene E nicht parallel, sondern sie schneiden sich in einem Punkt.

2. Schritt: Schnittpunkt von *h* und *E* ermitteln

Die Gleichung der Ebene E hast du in Koordinatenform vorliegen. Du kannst also die Gleichung der Geraden h in die drei Zeilen $x = \ldots, y = \ldots$ und $z = \ldots$ aufteilen und anschließend an der jeweiligen Stelle in die Koordinatenform der Ebenengleichung von E einfügen. So erhältst du eine Gleichung mit der Unbekannten s. Löse diese auf und setze den resultierenden Wert für s zuletzt in die Gleichung von h ein. Damit berechnest du die Koordinaten des Schnittpunkts.

Aufgeteilt in die drei Zeilen lautet die Gleichung von h:

$$\begin{aligned} x &= -3{,}5 + 0 \\ y &= 0 + 2s \\ z &= 3 + s \end{aligned}$$

Einsetzen in die Koordinatenform der Ebenengleichung von E ergibt:

$$\begin{aligned} 5 \cdot (-3{,}5) - 2 \cdot (2s) &= -33{,}5 \\ -17{,}5 - 4s &= -33{,}5 \quad && \mid +17{,}5 \\ -4s &= -16 && \mid : (-4) \\ s &= 4 \end{aligned}$$

Setze $s = 4$ zuletzt in die Geradengleichung von h ein und berechne so die Koordinaten des Schnittpunkts Z von h und E:

$$\overrightarrow{OZ} = \begin{pmatrix} -3{,}5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3{,}5 & + & 0 \\ 0 & + & 8 \\ 3 & + & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3{,}5 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Die Gerade h und die Ebene E schneiden sich im Punkt $Z\,(-3{,}5 \mid 8 \mid 7)$.

c) ▶ **Entscheiden, ob die Flugzeuge kollidieren könnten** (5P)

Die Gerade h beschreibt die Flugbahn eines Airbus und die Gerade g die Flugbahn einer Boeing. Die Flugzeuge könnten kollidieren, wenn sich die Flugbahnen kreuzen, d.h. wenn die beiden Geraden einen Schnittpunkt aufweisen. Folglich ist auch in dieser Aufgabe eine Lagebeziehung zu untersuchen.

Du kannst ähnlich vorgehen wie in Aufgabenteil b):

- Setze die Gleichungen der Geraden g und h gleich und erhalte daraus ein lineares Gleichungssystem.
- Wenn das LGS lösbar ist, dann schneiden sich die beiden Geraden in einem Punkt und die Flugzeuge könnten kollidieren.
- Wenn das LGS nicht lösbar ist, dann schneiden sich die Flugbahnen nicht und es besteht keine Kollisionsgefahr.

Setze die Gleichungen von g und h gleich:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \overset{g \cap h}{=} \begin{pmatrix} -3{,}5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Hieraus ergibt sich ein lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{llcl} (1) & 4r & = & -3{,}5 \\ (2) & 3 & = & 0 + 2s \\ (3) & 1 - r & = & 3 + s \end{array}$$

Aus der ersten Zeile folgt:

$$\begin{aligned} 4r &= -3{,}5 \qquad \mid :4 \\ r &= -\tfrac{7}{8} \end{aligned}$$

Aus der zweiten Zeile folgt:

$$\begin{aligned} 3 &= 2s \qquad \mid :2 \\ s &= 1{,}5 \end{aligned}$$

Setze $r = -\frac{7}{8}$ und $s = 1{,}5$ zur Kontrolle in die dritte Zeile ein:

$$\begin{aligned} 1-\left(-\tfrac{7}{8}\right) &= 3+1,5 \\ 1+\tfrac{7}{8} &= 4,5 \\ 1,875 &= 4,5 \end{aligned}$$

Dies ist eine **falsche** Aussage. Das lineare Gleichungssystem ist nicht lösbar. Entsprechend besitzen die Geraden g und h keinen Schnittpunkt und es folgt:

Die Geraden g und h und damit auch die Flugbahnen von Airbus und Boeing verlaufen windschief. Die Flugzeuge könnten nicht kollidieren.

d) ▶ **Abstand zur Flugbahn h des Airbus berechnen** (4P)

Die Boeing befindet sich im Punkt $P\,(-4 \mid 3 \mid 2)$ und es soll der Abstand des Flugzeugs zur Flugbahn h des Airbus berechnet werden. Du sollst also den Abstand eines Punktes von einer Geraden bestimmen. Der Abstand von einem Punkt zu einer Geraden wird immer **senkrecht** zur Geraden gemessen. Der Abstand von Punkt P und der Geraden h entspricht also dem Abstand von Punkt P und dem **Lotfußpunkt** von P auf h. Zur Bestimmung dieses Lotfußpunkts L bieten wir zwei mögliche Lösungswege an:

- Eine Lösung über das Skalarprodukt (Lösungsweg A),
- eine Lösung über eine Hilfsebene (Lösungsweg B).

▶▶ **Lösungsweg A: Lösung über das Skalarprodukt**

Der Lotfußpunkt L liegt auf der Geraden h. Er hat also allgemein die Koordinaten $L\,(-3,5 \mid 2s \mid 3+s)$; diese Koordinaten gehen aus der Geradengleichung von h hervor.

Da der Abstand des Punktes P zur Geraden h senkrecht zu h gemessen wird, muss der Vektor $\overrightarrow{PL}$ **senkrecht** auf der Geraden h stehen, genauer gesagt: Der Vektor $\overrightarrow{PL}$ muss senkrecht auf dem Richtungsvektor der Geraden h stehen. Dies ist der Fall, wenn das Skalarprodukt der beiden Vektoren Null ist. Du kannst so vorgehen:

- Berechne das Skalarprodukt des Vektors $\overrightarrow{PL}$ mit dem Richtungsvektor der Geraden h.
- Berechne s so, dass dieses Skalarprodukt den Wert Null annimmt.
- Setze den Wert für s den Vektor $\overrightarrow{PL}$. Berechne dann den Betrag dieses Vektors. Dies ist dann der Abstand von P zur Geraden h.

1. Schritt: Skalarprodukt von $\overrightarrow{PL}$ und dem Richtungsvektor von h berechnen

Für den Vektor $\overrightarrow{PL}$ ergibt sich zunächst:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PL} &= \overrightarrow{OL} - \overrightarrow{OP} \\ &= \begin{pmatrix} -3,5 \\ 2s \\ 3+s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -3,5+4 \\ 2s-3 \\ 3+s-2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,5 \\ 2s-3 \\ s+1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Der Richtungsvektor von h ist der Vektor $\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$. Das Skalarprodukt von $\overrightarrow{PL}$ und diesem Richtungsvektor ist:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}0,5\\2s-3\\s+1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} &= 0,5\cdot 0+(2s-3)\cdot 2+(s+1)\cdot 1\\ &= 0+4s-6+s+1\\ &= 5s-5\end{aligned}$$

Das Skalarprodukt soll den Wert Null annehmen:

$$\begin{aligned}5s-5&=0 \quad &&|+5\\ 5s&=5 &&|:5\\ s&=1\end{aligned}$$

2. Schritt: Betrag von $\overrightarrow{PL}$ berechnen

Mit $s=1$ ergibt sich der Vektor

$$\overrightarrow{PL}=\begin{pmatrix}0,5\\2\cdot 1-3\\1+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,5\\-1\\2\end{pmatrix}$$

Der Betrag des Vektors $\overrightarrow{PL}$ ist der Abstand der Punkte P und L. Da L der Lotfußpunkt von P zur Geraden h ist, ist der Betrag von $\overrightarrow{PL}$ zugleich auch der Abstand von p zur Geraden h:

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{PL}\right| &= \left|\begin{pmatrix}0,5\\-1\\2\end{pmatrix}\right|\\ &= \sqrt{(0,5)^2+(-1)^2+2^2}\\ &= \sqrt{0,25+1+4}\\ &= \sqrt{5,25}\approx 2,29\end{aligned}$$

Da 1 LE im Koordinatensystem 1 km in der Realität entspricht, kannst du sagen: Die Boeing ist etwa 2,3 km von der Flugbahn des Airbus entfernt.

►► Lösungsweg B: Lösung über eine Hilfsebene

Der Lotfußpunkt L liegt auf der Geraden h. Da der Abstand des Punktes P zur Geraden h senkrecht zu h gemessen wird, muss der Vektor $\overrightarrow{PL}$ **senkrecht** auf der Geraden h stehen, genauer gesagt: Der Vektor $\overrightarrow{PL}$ muss senkrecht auf dem Richtungsvektor der Geraden h stehen.

Du kannst so vorgehen:

- Definiere eine Hilfsebene H in Koordinatenform. Wähle als Stützvektor den Vektor $\overrightarrow{OP}$ und als Normalenvektor der Richtungsvektor von h.
- Diese Ebene H enthält den Punkt P und verläuft senkrecht zur Geraden h. Der Schnittpunkt der Hilfsebene H und der Geraden h ist also der Lotfußpunkt L.
- Berechne den Schnittpunkt von H und h. Teile dazu die Geradengleichung von h in die drei Zeilen $x = \ldots, y = \ldots$ und $z = \ldots$ auf und setze sie an der entsprechenden Stelle in die Koordinatengleichung von H ein. Löse die resultierende Gleichung nach s auf und setze diesen Wert für s in die Geradengleichung von h ein, um die Koordinaten des Lotfußpunkts L zu ermitteln.
- Bestimme zuletzt die Länge des Vektors $\overrightarrow{PL}$. Dies ist der Abstand von P und L und damit auch der Abstand von P und h.

1. Schritt: Ebenengleichung von *H* bestimmen

Die Hilfsebene H soll den Stützvektor $\overrightarrow{OP}$ besitzen und ihr Normalenvektor soll der Richtungsvektor von h sein. Außerdem soll die Gleichung von H in Koordinatenform vorliegen. Diese lautet allgemein

$E : ax + by + cz = d,$

wobei a, b und c die Koordinaten des Normalenvektors sind. Setze hierfür die Koordinaten des Richtungsvektors von h ein:

$E : 2x + y = d.$

Setze nun die Koordinaten des Stützvektors $\overrightarrow{OP}$ ein und löse nach d auf. So erhältst du die vollständige Ebenengleichung in Koordinatenform:

$$\begin{aligned} 2 \cdot (-4) + 3 &= d \\ -8 + 3 &= d \\ -5 &= d \end{aligned}$$

Die Hilfsebene H hat die Ebenengleichung $H : 2x + y = -5$.

2. Schritt: Schnittpunkt von *h* und *H* berechnen

Teile die Geradengleichung von h in die drei Zeilen auf und setze diese anschließend in die Ebenengleichung von H ein. Löse dann nach s auf:

$$\begin{aligned} x &= -3{,}5 \\ y &= 2s \\ z &= 3 + s \end{aligned}$$

Einsetzen dieser Zeilen in die Ebenengleichung von H ergibt die Gleichung:

$$\begin{aligned} 2 \cdot (-3{,}5) + 2s &= -5 \\ -7 + 2s &= -5 \qquad \mid +7 \\ 2s &= 2 \qquad \mid :2 \\ s &= 1 \end{aligned}$$

Setze $s = 1$ in die Geradengleichung von h ein und ermittle so die Koordinaten des Lotfußpunkts L:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OL} &= \begin{pmatrix}-3,5\\0\\3\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}-3,5 & + & 0\\0 & + & 2\\3 & + & 1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}-3,5\\2\\4\end{pmatrix}\end{aligned}$$

3. Schritt: Betrag des Vektors $\overrightarrow{PL}$ berechnen

Für den Vektor $\overrightarrow{PL}$ ergibt sich nun:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PL} &= \overrightarrow{OL} - \overrightarrow{OP}\\ &= \begin{pmatrix}-3,5\\2\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-4\\3\\2\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}-3,5 & - & (-4)\\2 & - & 3\\4 & - & 2\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}0,5\\-1\\2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Der Betrag des Vektors $\overrightarrow{PL}$ ist der Abstand der Punkte P und L. Da L der Lotfußpunkt von P zur Geraden h ist, ist der Betrag von $\overrightarrow{PL}$ zugleich auch der Abstand von p zur Geraden h:

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{PL}\right| &= \left|\begin{pmatrix}0,5\\-1\\2\end{pmatrix}\right|\\ &= \sqrt{(0,5)^2 + (-1)^2 + 2^2}\\ &= \sqrt{0,25 + 1 + 4}\\ &= \sqrt{5,25} \approx 2,29\end{aligned}$$

Da 1 LE im Koordinatensystem 1 km in der Realität entspricht, kannst du sagen: Die Boeing ist etwa 2,3 km von der Flugbahn des Airbus entfernt.