1.

a)

▸ Bestimme die Koordinaten des Punktes *B*

Die Grundfläche der Pyramide liegt in der $x_1 - x_2$- Ebene. Das bedeutet, dass die x_3- Koordinate den Wert 0 hat.

Da der Punkt A auf der x_1-Achse und der Punkt C auf der x_2-Achse liegen und die Seitenlänge der Grundseite der Pyramide 12 m beträgt, erhältst du die Koordinaten von B, indem du Punkt A um 12 Einheiten entlang der x_2-Achse verschiebst. Addiere also zu der x_2-Koordinate von A 12 hinzu. Die x_1-Koordinate ist identisch, diese du erhältst du aber auch, indem du ebenfalls 12 zu der x_1-Koordinate von B hinzu addierst.

Der Punkt B hat demnach die Koordinaten $B(12\,|\,12\,|\,0)$.

▸ Bestimme das Volumen *V* des Pavillons

Der Pavillon ist eine gerade vierseitige Pyramide.

Das Volumen einer Pyramide berechnest du wie folgt:

$$\boxed{\boldsymbol{V = \frac{1}{3}\cdot G\cdot h}}$$

Die Grundseite G ist ein Quadrat mit einer Seitenlänge von 12 m.
Die Höhe h der Pyramide kannst du direkt aus der x_3- Koordinate des Punktes S ablesen. Sie beträgt 8 m.
Wenn du diese Wert in die Formel zur Berechnung des Volumens einsetzt, erhältst du das Volumen des Pavillons.

$$\begin{aligned} V &= \tfrac{1}{3}\cdot G\cdot h \\ &= \tfrac{1}{3}\cdot (12\,\mathrm{m})^2\cdot 8\,\mathrm{m} \\ &= 384\,\mathrm{m}^3 \end{aligned}$$

Das Volumen des Pavillons beträgt $384\,\mathrm{m}^3$.

b)

▸ Bestimme eine Normalenform der Ebene *E*

Die südliche Außenwand des Pavillons wird durch das Dreieck BCS beschrieben.

Um die Normalenform aufzustellen, benötigst du den Normalenvektor $\overrightarrow{n}$ und einen Punkt, der in der Ebene liegt. Den Normalenvektor erhältst du aus dem Vektorprodukt zweier Richtungsvektoren.

Die allgemeine **Normalenform einer Ebene** lautet:

$$\boxed{\boldsymbol{E: \overrightarrow{n}\cdot(\overrightarrow{x}-\overrightarrow{p}) = 0}}$$

Dabei ist $\overrightarrow{P}$ ein Punkt auf der Ebene.

Gehe nun folgendermaßen vor:

1. Stelle zwei Spannvektoren der Ebene auf
2. Bestimme $\overrightarrow{n}$ mit Hilfe des Vektorprodukts der beiden Spannvektoren
3. Stelle eine Gleichung der Ebene E in Normalenform auf

1. Schritt: Aufstellen der Spannvektoren

Zwei mögliche Spannvektoren der Ebene E sind die Vektoren $\overrightarrow{BC}$ und $\overrightarrow{BS}$.

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BS} = \overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{BS} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}$$

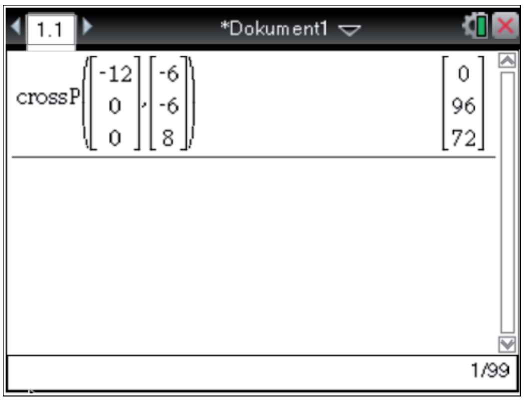
$$\overrightarrow{BS} = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

2. Schritt: Bestimme den Normalenvektor $\overrightarrow{n}$

Den Normalenvektor $\overrightarrow{n}$ erhältst du, indem du das **Vektorprodukt der Spannvektoren** $\overrightarrow{BC}$ und $\overrightarrow{BS}$ bildest.

$$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BS} = \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

menu → 7 → C → 2



Du erhältst:

$$\overrightarrow{n} = 24 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

3. Schritt: Stelle eine Gleichung der Ebene *E* in Normalenform auf

Setze nun den Normalenvektor $\overrightarrow{n}$ und einen Punkt der Ebene E in die allgemeine Normalenform ein.

Als Aufpunkt der Ebene E kannst du zum Beispiel den Punkt B wählen.

$$E: \overrightarrow{n} \cdot (\overrightarrow{x} - \overrightarrow{OB}) = 0$$

$$E: \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \left(\overrightarrow{x} - \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 0$$

$$E: 0 \cdot (x_1 - 12) + 4 \cdot (x_2 - 12) + 3 \cdot (x_3 - 0) = 0$$

$$E: 4x_2 - 48 + 3x_3 = 0$$

$$E: 4x_2 + 3x_3 - 48 = 0$$

Eine Gleichung der Ebene E lautet in Normalenform: $4x_2 + 3x_3 - 48 = 0$.

c)

▶ Ermittle, in welcher Höhe die Strebe an der Außenwand befestigt wird

Es soll eine möglichst kurze Strebe von dem Mittelpunkt M der Grundfläche zu der südlichen Außenwand angebracht werden. Die kürzeste Strebe ist die, die im rechten Winkel auf die Außenwand trifft.

Die Außenwand entspricht der Ebene E.

1. Bestimme die Koordinaten des Mittelpunktes M
2. Stelle die Lotgerade LM auf
3. Berechne den Schnittpunkt der Gerade LM und der Ebene E

1. Schritt: Bestimme die Koordinaten des Punktes *M*

Um die Koordinaten des Mittelpunktes M zu bestimmen, gibt es zwei Möglichkeiten. Du kannst die Koordinaten von dem Punkt M direkt aus der Skizze ablesen (1. Möglichkeit), oder du berechnest sie über die Formel zur Berechnung des Mittelpunktes einer Strecke (2. Möglichkeit).

1. Möglichkeit: Ablesen der Koordinaten

Die Grundfläche des Pavillons ist ein Quadrat. Das bedeutet, dass der Mittelpunkt genau bei der Hälfte der jeweilige Seiten liegt. Die Seiten sind jeweils 12 m lang.

Folglich muss der Punkt M die Koordinaten $M(6 \mid 6 \mid 0)$ haben.

2. Möglichkeit: Mittelpunkt einer Strecke

Die Diagonalen in einem Quadrat halbieren sich genau in der Mitte. Das heißt, der Punkt M liegt in der Mitte der Strecke $\overline{AC}$ bzw. $\overline{BD}$

Die allgemeine Formel, zur Berechnung des Mittelpunktes M einer Strecke $\overline{PQ}$ berechnest du wie folgt:

$\overrightarrow{M} = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{P} \cdot \overrightarrow{Q})$

Setze nun die Ortsvektoren der Punkte A und C oder die der Punkte B und D ein.

$$\overrightarrow{M} = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{A} + \overrightarrow{C}) \qquad \overrightarrow{M} = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{B} + \overrightarrow{D})$$

$$\overrightarrow{M} = \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \qquad \overrightarrow{M} = \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$\overrightarrow{M} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{M} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{M} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{M} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Der Punkt M hat die Koordinaten $M(6 \mid 6 \mid 0)$.

2. Schritt: Aufstellen der Lotgerade *LM*

Die **Lotgerade** LM trifft im rechten Winkel auf die Ebene E. Dies ist somit die kürzeste Strecke zwischen dem Punkt M und der Ebenen E und damit auch die kürzeste Strebe.

Da die Lotgerade LM senkrecht auf der Ebene E steht, entspricht der Normalenvektor der Ebene dem Richtungsvektor der Lotgerade. Der Stützvektor der Geraden ist der Ortsvektor des Punktes M.

Du erhältst also folgende Lotgerade LM.

$$LM: \overrightarrow{x} = \overrightarrow{M} + s \cdot \overrightarrow{n} \qquad s \in \mathbb{R}$$

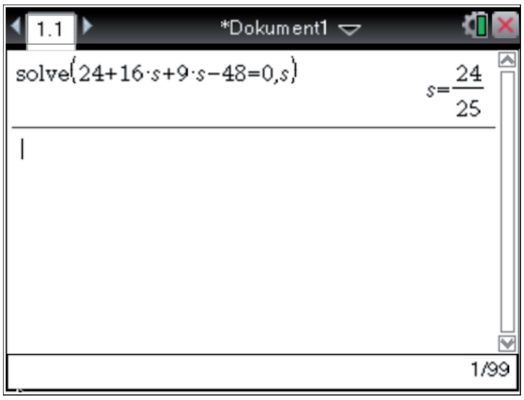
$$LM: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

3. Schritt: Berechne den Schnittpunkt der Lotgeraden *LM* und der Ebene *E*

Der Schnittpunkt der Lotgeraden LM und der Ebene E entspricht dem **Lotfußpunkt** L. Aus den Koordinaten des Punktes L kannst du die Höhe ablesen, in der die Strebe an der Außenwand befestigt ist.

Um den Schnittpunkt zu berechnen, setzt du die Einträge der Geradengleichung LM in die Normalengleichung der Ebene E ein.

$$\begin{aligned} E: 4x_2 + 3x_3 - 48 &= 0 \\ LM \cap E: 4(6+4s) + 3(0+3s) - 48 &= 0 \\ 24 + 16s + 9s - 48 &= 0 \\ 25s - 24 &= 0 \qquad \mid +24 \\ 25s &= 24 \qquad \mid :25 \\ s &= \frac{24}{25} \end{aligned}$$



Setze nun $s=\frac{24}{25}$ in die Geradengleichung LM ein, um die Koordinaten von L zu erhalten.

$$LM: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{L} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{24}{25} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{L} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9,84 \\ 2,88 \end{pmatrix}$$

Der Punkt F hat die Koordinaten $F(6 \,|\, 9,84 \,|\, 2,88)$. Die x_3-Koordinate gibt die Höhe an.

Die Strebe ist in einer Höhe von 2,88 m angebracht.

d)

▸ Berechne die Fläche A, die die Solarmodule bedecken

Die Solarmodule bedecken eine dreieckige Fläche, mit den Eckpunkten S und den Mittelpunkten der Kanten $\overline{SB}$ und $\overline{SC}$.

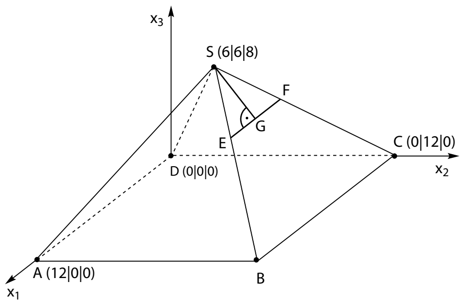
Den Flächeninhalt eines Dreiecks berechnest du wie folgt:

$$\boxed{\boldsymbol{A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h_g}}$$

Dabei ist g eine Seite des Dreiecks und h_g die zugehörige Höhe.

Zunächst benötigst du die Koordinaten der Mittelpunkte E und F der Kanten $\overline{SB}$ und $\overline{SC}$. Wenn du den Abstand der Punkte berechnest, erhältst du die Länge der Grundseite. Die zugehörige Höhe h erhältst du, indem du den Abstand zwischen dem Mittelpunkt der Strecke $\overline{EF}$ und dem Punkt S berechnest.

1. Berechne die Koordinaten der Mittelpunkte E und F der Seitenkanten SB und SC
2. Ermittle den Abstand $d_{E,F}$
3. Berechne die Höhe h
4. Setze die Werte in die Formel zur Berechnung des Flächeninhaltes A ein



1. Schritt: Berechne die Koordinaten der Punkte *E* und *F*

Die Koordinaten des Mittelpunkts einer Strecke berechnest du, indem du die Ortsvektoren der Punkte, die die Strecke begrenzen, addierst und anschließend mit $\frac{1}{2}$ multiplizierst.

Du erhältst also:

$$\overrightarrow{OE} = \frac{1}{2}\cdot(\overrightarrow{OS}+\overrightarrow{OB})$$
$$\overrightarrow{OE} = \frac{1}{2}\cdot\left(\begin{pmatrix}6\\6\\8\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}12\\12\\0\end{pmatrix}\right)$$
$$\overrightarrow{OE} = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}18\\18\\8\end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{OE} = \begin{pmatrix}9\\9\\4\end{pmatrix}$$

Der Punkt E hat die Koordinaten $E(9\,|\,9\,|\,4)$.

$$\overrightarrow{OF} = \frac{1}{2}\cdot(\overrightarrow{OS}+\overrightarrow{OC})$$
$$\overrightarrow{OF} = \frac{1}{2}\cdot\left(\begin{pmatrix}6\\6\\8\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\12\\0\end{pmatrix}\right)$$
$$\overrightarrow{OF} = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}6\\18\\8\end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{OF} = \begin{pmatrix}3\\9\\4\end{pmatrix}$$

Der Punkt F hat die Koordinaten $F(3\,|\,9\,|\,4)$.

2. Schritt: Bestimme den Abstand $d_{E,F}$

Den Abstand zwischen zwei Punkten $P(p_1\,|\,p_2\,|\,p_3)$ und $Q(q_1\,|\,q_2\,|\,q_3)$ berechnest du mit folgender Formel:

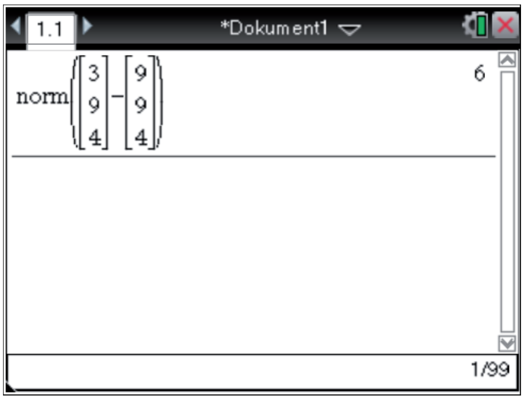
$$\boxed{\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{(q_1-p_1)^2+(q_2-p_2)^2+(q_3-p_3)^2}}$$

Setze die Koordinaten der Punkte E und F in die Formel ein, um den Abstand $d_{E,F}$ zu berechnen.

$$d_{E,F} = \sqrt{(f_1-e_1)^2+(f_2-e_2)^2+(f_3-e_3)^2}$$
$$d_{E,F} = \sqrt{(3-9)^2+(9-9)^2+(4-4)^2}$$
$$d_{E,F} = \sqrt{(-6)^2}$$
$$d_{E,F} = \sqrt{36}$$
$$d_{E,F} = 6$$

<u>*Alternativ*</u>

$\boxed{\texttt{menu} \rightarrow 7 \rightarrow 7 \rightarrow 1}$



Die Strecke zwischen den Punkten E und F ist demnach 6 m lang.

3. Schritt: Berechne die Höhe *h*

Um die Höhe h des Dreiecks EFS zu berechnen, benötigst du zunächst den Mittelpunkt G der Strecke $\overline{EF}$. Dann kannst du den Abstand der Punkte G und S berechnen. Dieser Abstand entspricht der Höhe.

Koordinaten des Punktes *G*:

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF})$$
$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$$
$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 18 \\ 8 \end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{OG} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix}$$

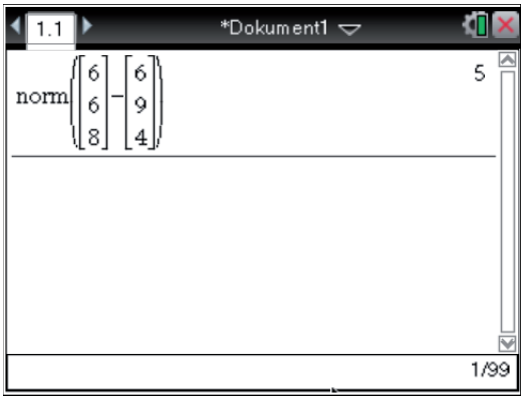
Der Punkt G hat die Koordinaten $G(6\,|\,9\,|\,4)$.

Abstand $d_{G,S}$:

$$d_{G,S} = \sqrt{(s_1 - g_1)^2 + (s_2 - g_2)^2 + (s_3 - g_3)^2}$$
$$d_{G,S} = \sqrt{(6-6)^2 + (6-9)^2 + (8-4)^2}$$
$$d_{G,S} = \sqrt{(-3)^2 + 4^2}$$
$$d_{G,S} = \sqrt{9+16}$$
$$d_{G,S} = \sqrt{25}$$
$$d_{G,S} = 5$$

Alternativ

`menu → 7 → 7 → 1`



Der Abstand zwischen den Punkten G und S entspricht $5\,\text{m}$. Dieser Abstand entspricht der Höhe h des Dreiecks EFS.

4. Schritt: Berechne den Flächeninhalt A

Nun kannst du die berechneten Werte in die Formel zur Berechnung des Flächeninhaltes einfügen.

$$\begin{aligned} A_\Delta &= \tfrac{1}{2}\cdot g\cdot h_g \\ A_{EFS} &= \tfrac{1}{2}\cdot d_{E,F}\cdot h \\ A_{EFS} &= \tfrac{1}{2}\cdot 6\,\text{m}\cdot 5\,\text{m} \\ A_{EFS} &= 15\,\text{m}^2 \end{aligned}$$

Die von Solarmodulen bedeckte Fläche ist $15\,\text{m}^2$ groß.

e)

▶ Schätze die Solarleistung ab

Um anhand der Tabelle die Solarleistung abschätzen zu können, benötigst du den Neigungswinkel der Solarmodule gegen die Horizontale.

Das bedeutet, dass du den Winkel zwischen der Ebene E und der $x_1 - x_2$- Ebene berechnen musst.

Den Winkel zwischen zwei Ebenen berechnest du mit folgender Formel:

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|}}$$

Den Normalenvektor der Ebene E hast du bereits berechnet. Ein Normalenvektor $\overrightarrow{n}_{x_1,x_2}$ der $x_1 - x_2$- Ebene lautet $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

Setze nun die Normalenvektoren $\overrightarrow{n}$ und $\overrightarrow{n}_{x_1,x_2}$ in die Formel ein.

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{n}_{x_1,x_2}}{|\overrightarrow{n}|\cdot|\overrightarrow{n}_{x_1,x_2}|}$$

$$\cos\alpha = \frac{\begin{pmatrix}0\\4\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}0\\4\\3\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|}$$

$$\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{0^2+4^2+3^2}\cdot\sqrt{0^2+0^2+1^2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{16+9}\cdot\sqrt{1}}$$

$$\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{25}\cdot 1}$$

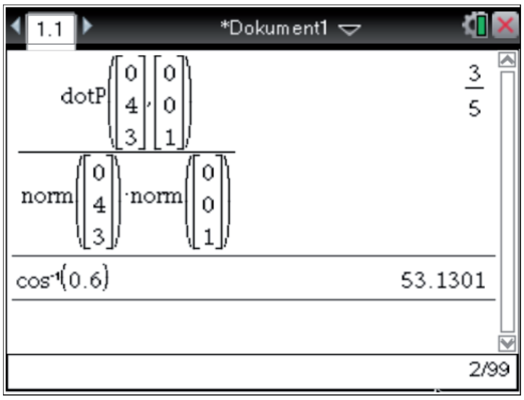
$$\cos\alpha = \frac{3}{5} \qquad |\ cos^{-1}(\ldots)$$

$$\alpha = 53,1^\circ$$

Alternativ

$\boxed{\texttt{norm: menu} \rightarrow 7 \rightarrow 7 \rightarrow 1}$

$\boxed{\texttt{dotP: menu} \rightarrow 7 \rightarrow C \rightarrow 3}$



Der Neigungswinkel der Solarmodule beträgt $53,1^\circ$.

Anhand der Tabelle siehst du, dass der Anteil der maximalen Leistung der Solarmodule demnach zwischen $94\,\%$ und $98\,\%$ liegt.

2.

a)

▶ Wert für k ermitteln

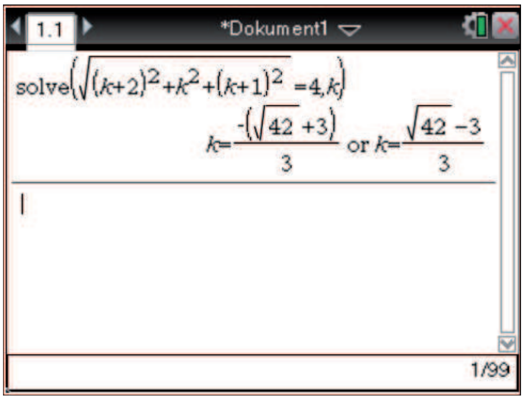
Du sollst diejenigen Werte des Parameters k ermitteln, für die die Punkte L und M_k den Abstand 4 haben. Den **Abstand zwischen zwei Punkten** berechnest du folgendermaßen:

$$\boxed{\boldsymbol{d_{L,M_k} = \sqrt{(m_{k_1} - l_1)^2 + (m_{k_2} - l_2)^2 + (m_{k_3} - l_3)^2}}}$$

In dieser Aufgabe soll gelten:

$$\begin{aligned} 4 &= d_{L,M_k} \\ 4 &= \sqrt{(m_{k_1} - l_1)^2 + (m_{k_2} - l_2)^2 + (m_{k_3} - l_3)^2} \\ 4 &= \sqrt{(k+2)^2 + (k-0)^2 + (k+1)^2} \end{aligned}$$

Nutze den `solve`-Befehl deines CAS zum Lösen dieser Gleichung:



Du erhältst die Werte $k_1 = -\frac{\sqrt{42}+3}{3}$ und $k_2 = \frac{\sqrt{42}-3}{3}$.

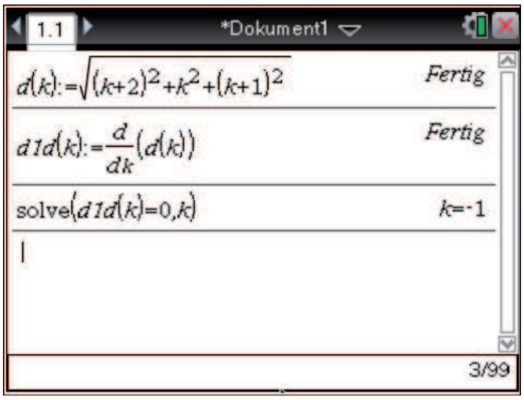
▶ Wert für k ermitteln, sodass der Abstand am geringsten ist

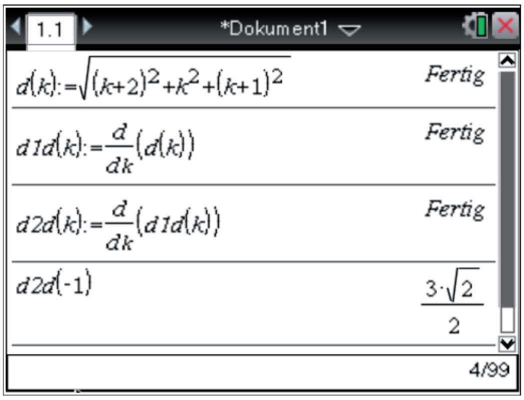
Jetzt sollst du k so wählen, dass L und M_k den kleinstmöglichen Abstand besitzen. **Minimiere dafür die Abstandsfunktion** $d_{L,M_k} = \sqrt{(k+2)^2 + (k-0)^2 + (k+1)^2}$.

Für eine Minimalstelle x_M einer Funktion f gibt es zwei Bedingungen:

- **Notwendige Bedingung:** $f'(x_M) = 0$
- **Hinreichende Bedingung:** $f''(x_M) > 0$

Bilde also mit deinem CAS die erste und zweite Ableitungsfunktion. Setze die erste Ableitung gleich 0 und überprüfe mithilfe der zweiten Ableitung, ob es sich tatsächlich um ein Minimum handelt.





Du erhältst $k_{min} = -1$ und da $d''_{L,M_k}(-1) > 0$ handelt es sich tatsächlich um ein Minimum.

Für $k = -1$ ist also der Abstand zwischen L und M_k am geringsten.

b)

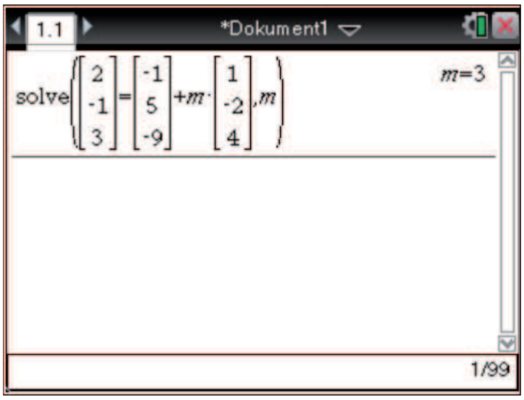
▶ Wert für k bestimmen, sodass sich die Geraden im Punkt T schneiden

Bestimme k so, dass sich g_k und h im Punkt $T(2\,|\,-1\,|\,3)$ schneiden.

Überprüfe zunächst, ob der Punkt T auf der Geraden h liegt:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -9 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

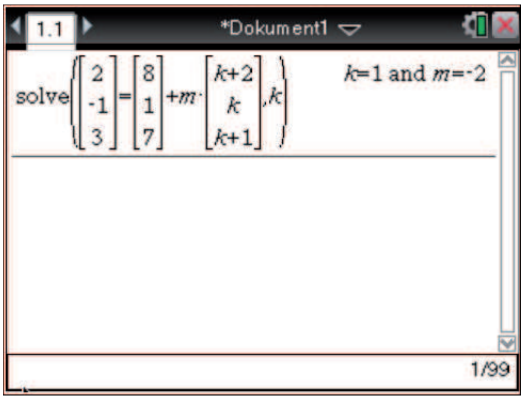
Nutze den `solve`-Befehl deines CAS zum Lösen dieser Gleichung:



Du erhältst einen Wert für μ, also liegt der Punkt T auf der Geraden h.

Bestimme jetzt den Parameter k, sodass der Punkt T auch auf der Geraden g_k liegt. Setze dafür den Ortsvektor des Punktes mit der Geradengleichung gleich.

Nutze den `solve`-Befehl deines CAS zum Lösen dieser Gleichung:



Für $k = 1$ liegt der Punkt T auf der Gerade g_1. Da T sowohl auf h, als auch auf g_1 liegt, schneiden die beiden Geraden sich in diesem Punkt.

c)

▸ Bestimme die Koordinaten von den Punkten *P* und *Q*

Die Punkte P und Q sollen von dem Punkt T gleich weit entfernt sein.

Der Punkt T liegt auf der Geraden g bzw. h. Du kannst nun eine neue **Geradengleichung aufstellen**, die den Aufpunkt T hat. Die Richtungsvektoren bleiben unverändert. Diese Geradengleichung beschreibt dann dieselbe Gerade.

Wählst du die Gerade g mit dem Aufpunkt T, erhältst du folgende Geradengleichung:

$$g' : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Setzt du nun für den Parameter t den gleichen Wert mit einem positiven und einem negativen Vorzeichen ein, entfernst du dich von dem Punkt T in unterschiedliche Richtungen gleich weit. Damit erhältst du die Koordinaten der Punkte P und Q.

Du kannst zum Beispiel $t = 1$ und $t = -1$ in die Geradengleichung einsetzen.

Einsetzen von $t = 1$:

$$\overrightarrow{P} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Einsetzen von $t = -1$:

$$\overrightarrow{Q} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Punkte P und Q könnten die Koordinaten $P(5 \mid 0 \mid 5)$ und $Q(-1 \mid -2 \mid 1)$ haben.

d)

▸ Ermittlung der Koordinaten der Punkte *U* und *V*

Die Punkte P, Q, U und V bilden das Rechteck $PUQV$. Die Diagonalen des Rechtecks sind gleich lang und halbieren sich in der Mitte in dem Punkt T. Das bedeutet, dass die Eckpunkte des Rechtecks von T alle den selben Abstand haben.

Gehe in zwei Schritten vor:

1. Berechne den **Abstand** d zwischen den Punkten T und P
2. Bestimme den **Einheitsvektor des Richtungsvektors** v der Gerade h'

1. Schritt: Abstand *d* zwischen den Punkten *T* und *P*

Den Abstand zwischen zwei Punkten $P(p_1 \mid p_2 \mid p_3)$ und $Q(q_1 \mid q_2 \mid q_3)$ berechnest du mit folgender Formel:

$$\boxed{\left|\overline{PQ}\right| = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2 + (q_3 - p_3)^2}}$$

Der Abstand d hängt von den Koordinaten des Punktes P ab. Diese sind hier unbekannt.

Im weiteren Verlauf werden die Koordinaten der Punkte U und V in Abhängigkeit des Abstands d bestimmt.

Der Abstand d entspricht dem Abstand zwischen dem Punkt T und allen vier Eckpunkten.

2. Schritt: Bestimme den Einheitsvektor

Der Einheitsvektor hat die Länge 1.

Den Einheitsvektor $\overrightarrow{v_1}$ eines Richtungsvektors $\overrightarrow{v}$ berechnest du wie folgt:

$$\boxed{\overrightarrow{v_1} = \frac{\overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{v}|}}$$

Du hast den Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ gegeben.

$$\overrightarrow{v_1} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}\right|}$$

$$\overrightarrow{v_1} = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 4^2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{v_1} = \frac{1}{\sqrt{1 + 4 + 16}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{v_1} = \frac{1}{\sqrt{21}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Setze diesen Einheitsvektor v_1 nun anstatt des Richtungsvektors in die Geradengleichung h' ein.

$$h' : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \frac{1}{\sqrt{21}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Wenn du für den Parameter s den Abstand d mit positivem und negativem Vorzeichen einsetzt, erhältst du die Koordinaten der Punkte U und V.

Der Punkt U hat die Koordinaten $U\left(2 + \frac{1d}{\sqrt{21}} \mid -1 - \frac{2d}{\sqrt{21}} \mid 3 + \frac{4d}{\sqrt{21}}\right)$. Der Punkt V hat dementsprechend die Koordinaten $V\left(2 - \frac{1d}{\sqrt{21}} \mid -1 + \frac{2d}{\sqrt{21}} \mid 3 - \frac{4d}{\sqrt{21}}\right)$.