a) ▶ **Definitionsbereich $\mathbb{D}$ von f_a angeben** (4P)

Der Definitionsbereich von f_a umfasst alle Werte, die für x in den Funktionsterm von f_a eingesetzt werden dürfen. Bei der Scharfunktion f_a handelt es sich um eine Schar gebrochenrationaler Funktionen, mit:

$f_a(x) = \dfrac{a \cdot x^2 + 3}{2 \cdot x - 1}$.

Beim Bestimmen der Definitionsmenge $\mathbb{D}$ einer gebrochenrationalen Funktion betrachtest du den Nenner dieser Funktion. Bestimme alle Werte für x, für welche sich der Nenner der Funktion zu Null ergibt. Diese Werte müssen aus dem Definitionsbereich $\mathbb{D}$ von f_a dann ausgeschlossen werden, da eine Division durch Null nicht zulässig ist.

▶ **Verhalten der Funktionswerte von f_a für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$**

Nun sollst du das Verhalten der Funktionswerte von f_a für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$ in Abhänigkeit des Parameters a mit $a \geq 0$ bestimmen.

Bei der Grenzwertbetrachtung einer gebrochenrationalen Funktion ist es sinnvoll, den Funktionsterm dieser Funktion in Zähler- und Nennerfunktion zu unterteilen. Hier gilt:

- Zählerfunktion: $Z(x) = a \cdot x^2 + 3$.
- Nennerfunktion: $N(x) = 2 \cdot x - 1$.

Das heißt, gilt $a \geq 0$, so liegt mit Z eine quadratische Funktion und mit N eine lineare Funktion vor. Gilt hingegen $a = 0$, so entfällt bei $Z(x)$ der quadratische Teil des Terms. Hier muss also offensichtlich eine Fallunterscheidung nach $a > 0$ und $a = 0$ gemacht werden.

Des Weiteren solltest du das Wachstumsverhalten der vorliegenden Funktionen beachten:

- Eine quadratische Funktion strebt für $x \to \pm\infty$ gegen ∞. Das Vorzeichen vor ∞ ist also nicht relevant.
- Das Wachstumsverhalten einer linearen Funktion ist abhängig vom Vorzeichen ∞.
- Eine quadratische Funktion besitzt für $x \to \pm\infty$ in jedem Fall ein stärkeres Wachstum als eine lineare Funktion.

b) ▶ **Bestimmen des Parameters a und der Art des Extremums** (17P)

Der Aufgabenstellung kannst du entnehmen, dass einer der Graphen G_a der Scharfunktion f_a einen Extrempunkt E mit dem Koordinaten $E(-1 \mid f_a(-1))$ besitzt. Deine Aufgabe ist es nun, den Parameterwert a jener Funktion f_a zu bestimmen, welche eben diesen Extrempunkt E besitzt. Des Weiteren ist es hier deine Aufgabe, die Art des Extremums festzustellen.

Bei einer Extremstelle x_E sind dabei folgende zwei Bedingungen immer erfüllt:

- Notwendige Bedingung: $f_a'(x_E) = 0$.
- Hinreichende Bedingung: $f_a''(x_E) \neq 0$.

Da dir bekannt ist, dass die Extremstelle sich bei $x_E = -1$ befindet, kannst du mit Hilfe der notwendigen Bedingung den gesuchten Parameterwert von a berechnen. Bestimme dazu zunächst die erste Ableitungsfunktion f_a' von f_a und ermittle, für welchen Parameterwert für a diese an der Stelle $x_E = -1$ die notwendige Bedingung für eine Extremstelle erfüllt. Bestimme anschließend mit Hilfe der zweiten Ableitung f_a'' von f_a und dem bestimmten Parameterwert für a die Art des Extremums bei $x_E = -1$, wobei für diese gilt:

- $f_a''(x_E) < 0$: Bei $x_E = -1$ befindet sich ein lokales Maximum.
- $f_a''(x_E) > 0$: Bei $x_E = -1$ befindet sich ein lokales Minimum.

▶ Ermitteln der Art und Koordinaten des zweiten lokalen Extrempunktes

Der Aufgabenstellung kannst du entnehmen, dass der Graph der Funktion $f_{1,5}$ neben dem oben behandelten Hochpunkt einen weiteren Extrempunkt besitzt. Deine Aufgabe ist es dabei, die Koordinaten und die Art dieses Extrempunktes zu bestimmen.
Eine Extremstelle x_{E_2} erfüllt dabei folgende zwei Bedingungen (siehe oben):

- Notwendige Bedingung: $f_{1,5}'(x_{E_2}) = 0$
- Hinreichende Bedingung: $f_{1,5}''(x_{E_2}) \neq 0$

Die gesuchte weitere Extremstelle bestimmst du also über Nullsetzen der ersten Ableitungsfunktion $f_{1,5}'$ von $f_{1,5}$. Oben hast du bereits die allgemeinen Ableitungsfunktion f_a' und f_a'' von f_a bestimmt. Verwende diese hier zum Bestimmen der ersten und zweiten Ableitungsfunktion von $f_{1,5}$.
Hast du die weitere Extremstelle bei x_{E_2} bestimmt, so stellst du mit der zweiten Ableitungsfunktion $f_{1,5}''$ von $f_{1,5}$ deren Art fest, wobei auch hier wieder gilt:

- Aus $f_{1,5}''(x_{E_2}) < 0$ folgt: Die Funktion $f_{1,5}$ hat an der Stelle x_{E_2} ein lokales Maximum.
- Aus $f_{1,5}''(x_{E_2}) > 0$ folgt: Die Funktion $f_{1,5}$ hat an der Stelle x_{E_2} ein lokales Minimum.

Anschließend bestimmst du durch Einsetzen der bestimmten Extremstelle x_{E_2} in die Funktion $f_{1,5}$ die zugehörige y-Koordinate des Extrempunktes.

Du gehst also so vor:

1. Schritt: Ermitteln der Extremstelle x_{E_2} über notwendige Bedingung

2. Schritt: Überprüfen der hinreichenden Bedingung bei x_{E_2}

3. Schritt: Bestimmen der y-Koordinate des Extrempunktes

c) **▶ Zeigen, dass alle Graphen G_a sich auf der y-Achse schneiden** (3P)

In diesem Aufgabenteil sollst du zeigen, dass sich alle Graphen G_a auf der y-Achse schneiden. Das heißt, dass du zunächst den Schnittpunkt S_y mit der y-Achse für alle Graphen G_a berechnest. Ist dieser unabhängig von Parameter a, so besitzen alle Graphen G_a denselben Schnittpunkt mit der y - Achse und du hast so gezeigt, dass alle Graphen G_a sich auf der y-Achse schneiden.

▶ Nachweis der gemeinsamen Tangente t

Nun sollst du nachweisen, dass die Graphen G_a im gemeinsamen Punkt S_y eine gemeinsame Tangente t haben und anschließend sollst du deren Gleichung ermitteln.
Damit alle Graphen G_a bei S_y eine gemeinsame Tangente besitzen, müssen folgende zwei Bedingungen an der Stelle $x_{S_y} = 0$ erfüllt sein:

- Der Funktionswert aller Scharfunktionen muss bei $x_{S_y} = 0$ unabhängig von a sein.
- Der Ableitungswert bzw. die Steigung der Scharfunktionen muss bei $x_{S_y} = 0$ unabhängig von a sein.

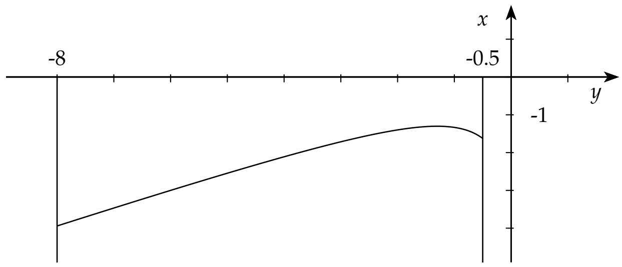
Da du die erste Bedingung bereits im vorherigen Aufgabenteil gezeigt hast, muss du hier nur noch nachweisen, dass alle f_a bei $x_{S_y} = 0$ die gleiche Steigung besitzen. Berechne dazu den Ableitungswert $f_a'(x_{S_y})$ und zeige, dass dieser unabhängig von a ist.
Die Tangentengleichung der gesuchten Tangente berechnest du dann über die allgemeine Form für eine Gerade:
$t(x) = mx + b$, mit:

- m: Steigung der Tangenten
- b: y-Achsenabschnitt der Tangenten

d) **▶ Berechnen der Querschnittsfläche des Brückenträgers** (7P)

In diesem Aufgabenteil sollst du den Flächeninhalt der Querschnittsfläche eines Brückenträgers berechnen. Der Graph G_1 schließt diesen Flächeninhalt modellhaft mit den zur y-Achse parallelen Geraden $x = -8$ und $x = -0,5$ und der x-Achse ein. Der berechnete Flächeninhalt soll auf zwei Dezimalstellen gerundet werden.

Um den Flächeninhalt A_B der Querschnittsfläche zu berechnen, berechnest du das Integral von f_1 über dem Intervall [-8;-0,5] . Berechnen kannst du es über den Hauptsatz der Integralrechnung. Die Grenzen des Integrals sind $x_U = -8$ und $x_O = -0,5$, da die Querschnittsfläche durch die beiden Geraden $x = -8$ und $x = -0,5$, die parallel zur y-Achse laufen, begrenzt wird.



Da die zu berechnende Fläche unterhalb der x-Achse liegt, wie du der Abbildung oben entnehmen kannst, berechnest du den Betrag des Integrals, da negative Werte für Flächeninhalte keinen Sinn ergeben.

Bevor du den Flächeninhalt A_B der Querschnittsfläche berechnen kannst, solltest du den Funktionsterm von f_1 in eine Summe eines ganzrationalen Terms und eines Bruchterms zerlegen. Das kannst du mit einer Polynomdivision erreichen.

e) **▶ Mittlerer Anstieg von G_1 berechnen** (9P)

In diesem Aufgabenteil sollst du den mittleren Anstieg des Graphen G_1 im Intervall $-8 \leq x \leq -4$ berechnen.

Den mittleren Anstieg m kannst du berechnen, indem du die Steigung der Sekante berechnest, die durch die beiden Punkte $P_1(-4|f_1(-4))$ und $P_2(-8|f_1(-8))$ verläuft. Wenn du die Steigung der Sekante berechnest, so bedeutet das, dass du die Steigung einer Geraden durch die beiden Punkte berechnest. Damit näherst du die Steigung von f_1 durch den mittleren Anstieg zwischen P_1 und P_2 im Intervall $[-8;-4]$ an.

Berechne also zum Lösen dieser Aufgabe zunächst die vollständigen Koordinaten von P_1 und P_2 und berechne dann über folgenden Ansatz den gesuchten mittleren Anstieg m:

$m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, mit $P_1(x_1 \mid y_1)$ und $P_2(x_2 \mid y_2)$.

▶ Nachweis, dass sich mittlerer und maximaler Anstieg um weniger als 0,02 unterscheiden

In diesem Aufgabenteil sollst du zeigen, dass die untere Grenze des Brückenträgers aus Teilaufgabe d) auch als Gerade beschrieben werden kann, indem du nachweist, dass sich der mittlere Anstieg m und der maximale Anstieg von G_1 im Intervall $[-8;-4]$ um weniger als 0,02 unterscheiden.

Den mittleren Anstieg hast du oben schon berechnet, dieser war:

$m = \frac{70}{153} \approx 0,4575$.

Berechne hier also den maximalen Anstieg von f_1 im Intervall $[-8;-4]$. Das tust du, indem du zunächst die zweite Ableitung der Funktion f_1 betrachtest. Die zweite Ableitung von f_1 gibt die Steigung der Steigung an. Der maximale Anstieg von f_1 im untersuchten Intervall liegt folglich also da, wo die erste Ableitung f_1' ein Maximum bzw. die zweite Ableitung f_1'' eine Nullstelle besitzt.

Bestimme also zunächst die zweite Ableitungsfunktion f_1'' von f_1 und bestimme deren potentiellen Extremstellen bzw. die Wendestellen von f_1. Betrachte hierzu folgende Bedingung für eine Wendestelle bei x_W:

- Notwendige Bedingung: $f_1''(x_W) = 0$.
- Hinreichende Bedingung: $f_1'''(x_W) \neq 0$.

Können jedoch keine Wendestellen von f_1 im betrachteten Intervall gefunden werden, so musst du dieses auf Randmaxima von f_1' untersuchen. Betrachte dazu die Steigung an den Rändern des angegebenen Intervalls.

Hast du die Stellen mit der maximalen Steigung bestimmt, so berechnest du mit Hilfe der ersten Ableitungsfunktion f_1' die Steigung an jener Extrem- bzw. Wendestelle, welche im betrachteten Intervall liegt. Somit hast du den maximalen Anstieg berechnet.

Wenn du den maximalen Anstieg berechnet hast, so bildest du die Differenz zwischen diesem und dem mittleren Anstieg. Ist dieser kleiner als 0,02, dann lässt sich die untere Begrenzung des Brückenträgers durch eine Gerade beschreiben.

Gehe also so vor:

1. Schritt: Die zweite und dritte Ableitung von f_1 bestimmen

2. Schritt: Maximalen Anstieg ermitteln

3. Schritt: Differenz ermitteln und beurteilen