1. **▶ Entscheidung über eine mögliche Anzahl an Spielzeug mit gefährlichen Kleinteilen** (6BE)

Bestimme die mögliche Anzahl durch das **Ausschlussverfahren**.

Zunächst ist bekannt, dass die gefährlichen Kleinteile der **häufigste Schwachpunkt** waren. Also muss es mehr Spielzeuge mit gefährlichen Kleinteilen als mit enthaltenen Schadstoffen geben. Somit muss muss die Anzahl der Spielzeuge mit gefährlichen Kleinteilen **größer als 16** sein. Somit fällt Lösung „14“ schon einmal weg.

Weiterhin ist bekannt, dass $\frac{1}{5}$, also 20 % aller Spielzeuge mangelhaft sind. Es werden 150 Spielzeuge betrachtet. Berechne also, wie viele Spielzeuge tatsächlich mangelhaft waren:

$0{,}2 \cdot 150 = 30$

In der Stichprobe waren 30 Spielzeuge mangelhaft. Also fällt auch die Anzahl „37“ weg, weil sie zu groß ist.

Damit folgt: Die Anzahl der Spielzeuge mit gefährlichen Kleinteilen kann 21 sein.

2. **▶ Berechnung der Wahrscheinlichkeit p** (11BE)

Durch Auflösen der gegebenen Gleichung nach p ergibt sich:

$$(1-p)\cdot\left(1-\frac{16}{150}\right) = 0{,}8$$

$$1-p = \frac{0{,}8}{1-\frac{16}{150}}$$

$$p = 1-\frac{0{,}8}{1-\frac{16}{150}} = 1-\frac{60}{67} = \frac{7}{67} \approx 0{,}104 = 10{,}4\%.$$

▶ Erklärung des Verwendeten Ansatzes

Wenn p die Wahrscheinlichkeit $P(K)$ ist und der Bruch $16/150$ die Wahrscheinlichkeit $P(S)$, dann geben die Ausdrücke in den Klammern jeweils die Wahrscheinlichkeiten $P(\overline{K})$ und $P(\overline{S})$ für die **Gegenereignisse** von K und S an.

Multipliziert man diese Gegenereignisse, so erhält man hier die Wahrscheinlichkeit $P(\overline{K}\cap\overline{S})$, also die Wahrscheinlichkeit, dass ein Spielzeug **weder** Kleinteile **noch** Schadstoffe enthält. Das bedeutet, dass ein Spielzeug den Test besteht. Dies ist wiederum bei 4 von 5 Spielzeugen der Fall, also mit einer Wahrscheinlichkeit von $4/5 = 0{,}8$. Das erklärt die rechte Seite der Gleichung. Insgesamt zeigt sie also die Beziehung

$$P(\overline{K})\cdot P(\overline{S}) = P(\overline{K}\cap\overline{S}).$$

▶ Voraussetzungen, unter denen dieser Ansatz richtig ist

Die Beziehung $P(\overline{K}\cap\overline{S}) = P(\overline{K})\cdot P(\overline{S})$ gilt nur, wenn die Ereignisse K und S **stochastisch unabhängig** sind. Im Sachzusammenhang heißt das: Der Ansatz stimmt nur, wenn das Auftreten von gefährlichen Schadstoffen für das Spielzeug nicht davon abhängig ist, ob vorher schon gefährliche Kleinteile gefunden wurden.

3.1 **▶ Angabe des Fehlers 1. Art** (13BE)

Der Fehler 1. Art besteht darin, die Nullhypothese **irrtümlich abzulehnen**. Das heißt, dass die Vermutung eigentlich wahr ist und $p = p_0 \geq 0{,}10$ gilt, jedoch gerade bei diesem Test weniger als 6 mangelhafte Proben auftreten und die Hypothese deshalb verworfen wird.

► Berechnung der maximalen Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art

Nach den Aussagen von oben gilt für die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art:

$$\alpha = P_{\{H_0 \text{ wahr}\}}(X \in \overline{A}) = P_{0,10}^{100}(X \leq 5) = 0{,}0576 \approx 5{,}8\%.$$

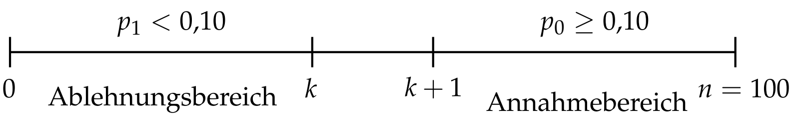
Die Wahrscheinlichkeit kann dabei den Tabellen der Binomialverteilung entnommen werden.

Diese Wahrscheinlichkeit kann auch **kleiner** sein: die große deutsche Spielzeugfirma geht von einem Mängelanteil von **weniger als 10 %** aus. Sicherheitshalber prüft das Institut daher die Nullhypothese $H_0 : p \geq 0,1$.

Es kann aber auch sein, dass der tatsächlichen Mängelanteil **deutlich kleiner** als 10 % ist. Dann könnte auch von einer **kleineren** Nullhypothesenwahrscheinlichkeit p_0 ausgegangen werden. Dies wiederum hätte eine kleinere Wahrscheinlichkeit für den Fehler erster Art zur Folge.

3.2 **► Entwicklung einer Entscheidungsregel auf dem Signifikanzniveau 1%**

Getestet werden soll die Nullhypothese H_0: $p_0 \geq 0{,}10$ auf dem Signifikanzniveau 1%. Die Hypothese wird abgelehnt werden, wenn sich in dem Test nur **sehr wenige** Spielzeuge finden lassen, die Mängel aufweisen. Als Ablehnungsbereich legen wir daher $\overline{A} = \{0; 1; ...; k\}$ bis zu einem bestimmten Wert k fest.



Das Signifikanzniveau gibt den maximalen Fehler 1. Art (siehe oben) an. Hier gilt nun also:

$$\alpha = P_{\{H_0 \text{ wahr}\}}(X \in \overline{A}) = P_{0,10}^{100}(X \leq k) \leq 0{,}01$$
$$k \leq 3.$$

Dieser Wert kann aus den Tabellen der Binomialverteilung entnommen werden. Die Entscheidungsregel lautet also: Die Nullhypothese muss verworfen werden, wenn sich höchstens 3 Spielzeuge im Test finden lassen, die mangelhaft sind.

► Bewertung der Behauptung der Spielzeugfirma bei 3 mangelhaften Proben

Wenn $k = 3$ Proben mangelhaft waren, muss die Behauptung **des Instituts** abgelehnt werden, da sich dieser Wert im Ablehnungsbereich des Signifikanztests befindet. Die vom Institut getestete Hypothese steht der der Spielzeugfirma jedoch komplementär gegenüber: Sie lautete „Mindestens jedes zehnte Spielzeug ist mangelhaft“. Wenn die Hypothese des Instituts abgelehnt wird, so wird die Hypothese „Weniger als jedes zehnte Spielzeug ist mangelhaft“ der Spielzeugfirma bestätigt.

Wenn 3 Proben mangelhaft sind, so wird der Behauptung der Spielzeugfirma Recht gegeben.