Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{20}x^4 - \frac{6}{5}x^2$.

a) Weisen Sie nach, dass der Graph von f symmetrisch ist. (10P)
Bestimmen Sie die drei Extrempunkte des Graphen von f.
Begründen Sie, dass der Graph von f zwei Wendepunkte besitzen muss.
Begründen Sie, dass eine ganzrationale Funktion 4. Grades nicht mehr als zwei Wendestellen besitzen kann.

b) Der Graph von f besitzt seine Wendepunkte an den Stellen $x = -2$ und $x = 2$. (9P)
Die Parallele zur x-Achse durch die beiden Wendepunkte schließt mit dem Graphen von f drei Flächenstücke ein. Diese sind in der Anlage 1 markiert.
Bestimmen Sie deren Inhalte.

c) Bestimmen Sie die 1. Ableitung f' zu der Funktion f. (14P)
Bestimmen Sie die Steigung des Graphen von f in den Wendepunkten.
Untersuchen Sie, welche Zahlenwerte aus $\mathbb{R}$ der Graph von f als Steigung besitzt.
Entscheiden Sie, ob es Zahlenwerte aus $\mathbb{R}$ gibt, die mehr als zweimal als Steigung des Graphen von f auftreten. Bestimmen Sie gegebenenfalls einen entsprechenden Zahlbereich.

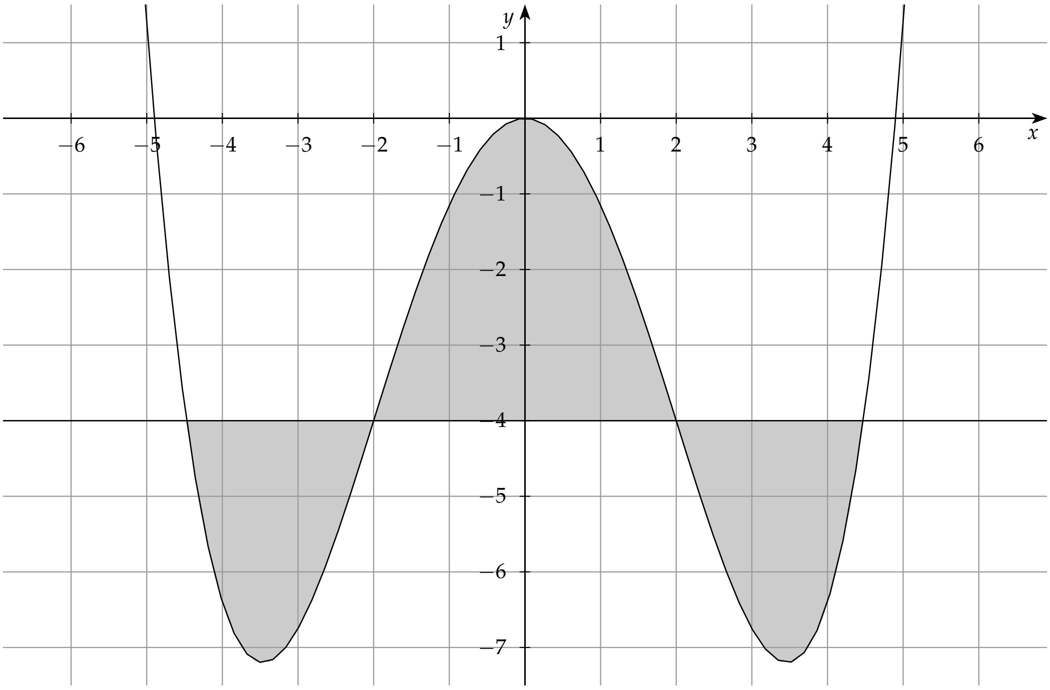
d) Gegeben ist die Funktionenschar g_k mit $g_k(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{k}{2} \cdot x^2; k \in \mathbb{R}$. (12P)
Ohne Nachweis können Sie verwenden, dass gilt:

- $g_k{}'(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - k \cdot x$
- $g_k{}''(x) = x^2 - 4x - k$

Weisen Sie nach, dass für $k = 0$ der Graph von g_0 an der Stelle $x = 0$ einen Sattelpunkt besitzt.
In der Anlage 2 ist ein Graph der Schar zu sehen, der an der Stelle $x = 3$ einen Sattelpunkt besitzt.
Bestimmen Sie den dazugehörigen Parameter k. Nullstellen der 2. Ableitung $g_k{}''$ lassen sich mit folgender Darstellung ermitteln:
$x = 2 + \sqrt{k+4}$ oder $x = 2 - \sqrt{k+4}$.
Untersuchen Sie, für welche Parameter k die Funktion g_k keine Wendestellen besitzt.

Material

Anlage 1 zu Teilaufgabe *b*)



Anlage 2 zu Teilaufgabe *d*)