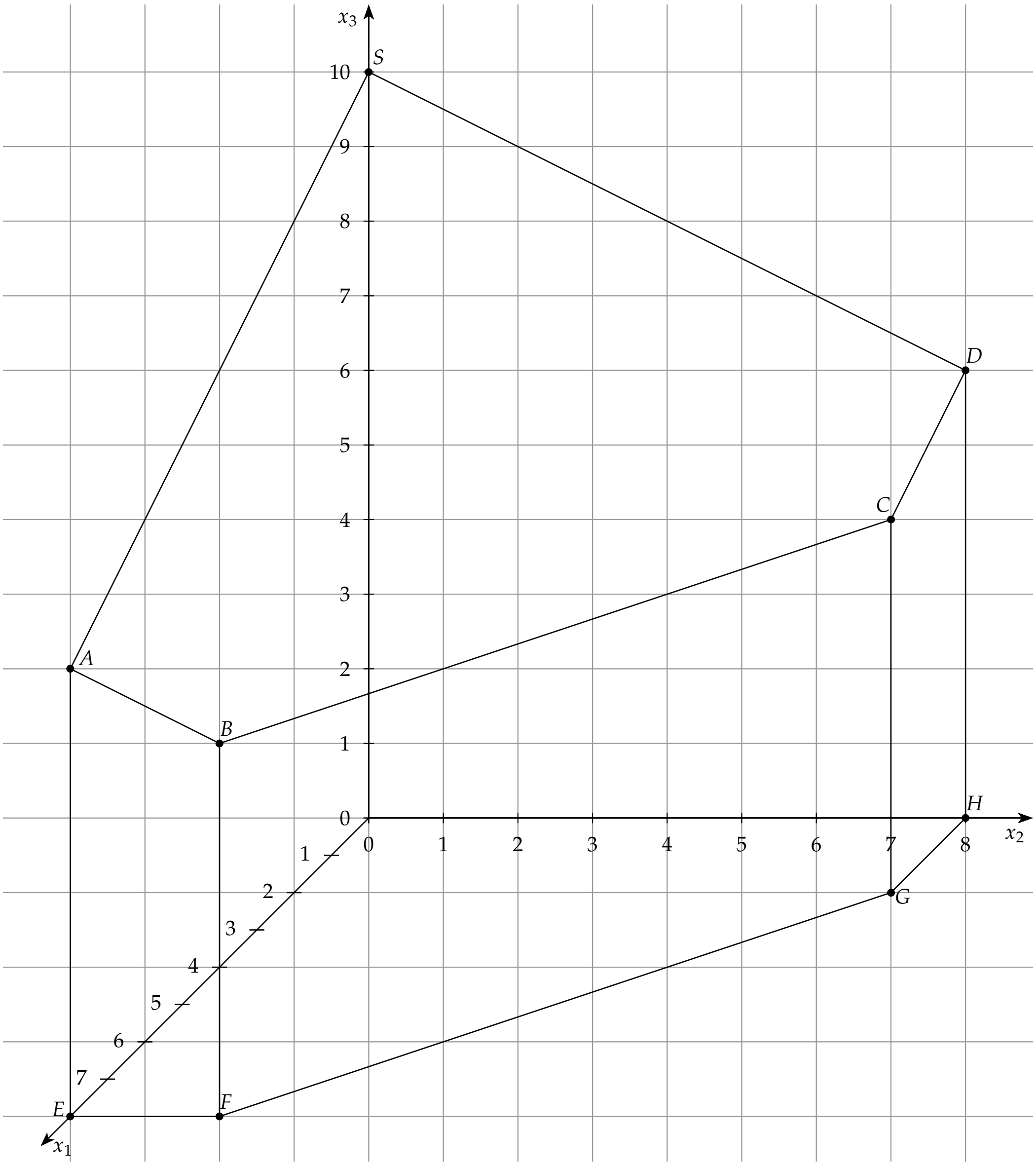
1.1 (1) **▶ Bestimmen der Koordinaten der Punkte E, F, G und H** (12BE)

Beim Bestimmen der gesuchten Koordinaten kann es hilfreich sein, die dir gegebene Zeichnung mit einer passenden Skala zu versehen. Hast du die Zeichnung richtig ergänzt, sollte diese so aussehen:



Koordinaten Punkt E:
Punkt E liegt senkrecht unterhalb von Punkt A auf der x_1 - Achse.
$\Longrightarrow E(8 \mid 0 \mid 0)$

Koordinaten Punkt F:
Punkt F liegt senkrecht unterhalb von Punkt B in der x_1, x_2 - Ebene.
$\Longrightarrow F(8 \mid 2 \mid 0)$

Koordinaten Punkt G:
Punkt G liegt senkrecht unterhalb von Punkt C in der x_1, x_2 - Ebene.
$\Longrightarrow G(2 \mid 8 \mid 0)$

Koordinaten Punkt H:
Punkt H liegt neben Punkt G auf der x_2 - Achse. Da die Strecke $\overline{GH}$ parallel zur x_1 - Achse ist ergeben sich diese Koordinaten für H
$\Longrightarrow H(0 \mid 8 \mid 0)$

(2) ▶ **Berechnen der benötigten Menge an Glas**

Die benötigte Menge an Glas berechnest du hier über den Flächeninhalt der Seitenfläche $BFGC$. Die Seitenfläche $BFGC$ bildet ein Rechteck, dessen Flächeninhalt A sich über folgende Formel berechnen lässt:

- $A = \text{Breite} \cdot \text{Länge}$

Als Breite könnte Strecke $\overline{BF}$ oder $\overline{CG}$ und als Länge Strecke $\overline{BC}$ oder $\overline{FG}$ in Frage kommen. Willst du den Flächeninhalt berechnen so benötigst du den Betrag dieser Strecken, also deren Längen.
Beim Lösen der Aufgabe könntest du so vorgehen:

- 1. Schritt: Bestimme den Betrag der Strecken $\overline{BF}$ und $\overline{BC}$
- 2. Schritt: Berechne den Flächeninhalt A über diese Formel: $A = |\overline{BF}| \cdot |\overline{BC}|$

1. Schritt:

$$|BF| = \left| \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{0^2 + 0^2 + (-5)^2} = 5\,\text{m}$$

$$|BC| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-6)^2 + 6^2 + 0^2} = 8{,}49\,\text{m}$$

2. Schritt:

$A = |\overline{BF}| \cdot |\overline{BC}| = 5\,\text{m} \cdot 8{,}49\,\text{m} = 42{,}45\,\text{m}^2$

$\Longrightarrow$ Es werden insgesamt $42{,}45\,\text{m}^2$ Glas benötigt.

1.2 (1) ▶ **Bestimmen einer Gleichung der Dachebene $ABCDS$ in Parameterform**

Die Parameterform einer Ebene besteht aus einem Aufpunkt und zwei Richtungsvektoren. Der Aufpunkt der Parameterform der Dachebene E könnte hier beispielsweise Punkt A sein, mit den zugehörigen Richtungsvektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AS}$.

Gleichung der Dachebene E in Parameterform:

$$E: \overrightarrow{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 8-8 \\ 2-0 \\ 5-6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0-8 \\ 0-0 \\ 10-6 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow E: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(2) ▶ **Bestimmen einer Gleichung der Dachebene $ABCDS$ in Koordinatenform**

Die allgemeine Form einer Ebene in Koordinatenform sieht wie folgt aus:
$n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 = d$.
Wobei n_1, n_2 und n_3 den Einträgen des Normalenvektors $\overrightarrow{n}$ der Ebene E entsprechen. d ergibt sich durch Einsetzen eines Punktes, welcher auf der Ebene E liegt.
Gehe beim Bestimmen der Ebenengleichung von E in Koordinatenform schrittweise vor:

- 1. Schritt: Bestimmen des Normalenvektors $\overrightarrow{n}$ über das Kreuzprodukt der Richtungsvektoren der Ebene E.
- 2. Schritt: Ermitteln von d durch Einsetzen des Aufpunkts A der Ebene E in die Koordinatenform.

1. Schritt:

Kreuzprodukt der Richtungsvektoren:

$$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 4 - (-1) \cdot 0 \\ -1 \cdot (-8) - 0 \cdot 4 \\ 0 \cdot 0 - 2 \cdot (-8) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 - 0 \\ 8 - 0 \\ 0 + 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 16 \end{pmatrix} \widehat{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow E: \; 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 = d$

2. Schritt:

Einsetzen des Aufpunkts A in die Ebenengleichung der Ebene E in Koordinatenform:
$1 \cdot 8 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 6 = d \;\Leftrightarrow\; d = 20$

Eine Gleichung der Dachebene $ABCDS$ in Koordinatenform ist:
$x_1 + x_2 + x_3 = 20$

2. (1) ▶ **Berechnen des Winkels, unter welchem die Sonnenstrahlen auf $ABCDS$ treffen**

Willst du den Winkel zwischen der Dachebene E und dem Vektor $\overrightarrow{v}$ der Sonnenstrahlen berechnen, so benötigst du den Normalenvektor $\overrightarrow{n}$ der Ebene E. Den Normalenvektor $\overrightarrow{n}$ von E hast du bereits im vorhergegangenen Aufgabenteil bestimmt, dieser war:

- $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Winkel α zwischen Vektor $\overrightarrow{v}$ und Ebene E bestimmst du nun über folgende Formel:

- $\sin\alpha = \dfrac{|\overrightarrow{n} \circ \overrightarrow{v}|}{|\overrightarrow{n}| \cdot |\overrightarrow{v}|}$

Berechnen des Winkels α:

$$\sin\alpha = \frac{|\overrightarrow{n}\circ\overrightarrow{v}|}{|\overrightarrow{n}|\cdot|\overrightarrow{v}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}\right|} = \frac{1\cdot 2+1\cdot 1+2\cdot(-1)}{\sqrt{1^2+1^2+2^2}\cdot\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}} \Leftrightarrow \alpha \approx 9{,}59\,^\circ$$

Der Winkel zwischen Vektor $\overrightarrow{v}$ und Dachebene E ist 9,59 °.

(2) ▶ **Berechnen einer Gleichung der Geraden h, welche die „Schattenkante“ beschreibt**

Dir ist bekannt, dass die Sonnenstrahlen parallel zum Vektor $\overrightarrow{v}$ auf die Dachebene E einfallen. Das bedeutet, Kante $\overline{BC}$ wird in Richtung des Vektors $\overrightarrow{v}$ der Sonnenstrahlen in die x_1x_2 - Ebene projiziert.
Willst du nun eine Gleichung der Geraden h bestimmen, auf welcher diese Schattenkante liegt, so bestimmst du die Eckpunkte der auf die x_1x_2 - Ebene projizierten Dachkante $\overline{B'C'}$. Nachdem du diese Punkte bestimmt hast, bildest du mit diesen eine Geradengleichung der Geraden h.
So könntest du dabei vorgehen:

- 1. Schritt: Bilden einer Geraden h' bzw. h'' mit Aufpunkt B bzw. C und Richtungsvektor $\overrightarrow{v}$
- 2. Schritt: Bestimmen des Schnittpunkts B' bzw. C' der Geraden h' bzw. h'' mit der x_1x_2 - Ebene
- 3. Schritt: Bilden der Geraden h mit Aufpunkt B' und Richtungsvektor $\overrightarrow{B'C'}$

1. Schritt:

- Gerade h' : $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix}8\\2\\5\end{pmatrix} + t_1\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$
- Gerade h'' : $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix}2\\8\\5\end{pmatrix} + t_2\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$

2. Schritt:
Setze, zum Bestimmen des Schnittpunkts B' bzw. C' von h' bzw. h'' und der x_1x_2 - Ebene, Gerade h' bzw. h'' als Vektor in Abhängigkeit von t_1 bzw. t_2 in die Koordinatenform der x_1x_2 - Ebene ein und löse nach Parameter t_1 bzw. t_2 auf.
Koordinatenform der x_1x_2 - Ebene: $x_3 = 0$.

Schnittpunkte B' und C':

1. Gerade h' als Vektor in Abhängigkeit von t: $h' : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 8+2\cdot t \\ 2+t \\ 5-t \end{pmatrix}$

2. Gerade h'' als Vektor in Abhängigkeit von t: $h' : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 2+2\cdot t \\ 8+t \\ 5-t \end{pmatrix}$

Einsetzen von h' und h'' in die Koordinatenform der x_1x_2 - Ebene und Auflösen nach t_1 und t_2:

$5 - t_1 = 0 \;\Leftrightarrow\; t_1 = 5$

$5 - t_2 = 0 \;\Leftrightarrow\; t_2 = 5$

Einsetzen von $t_1 = 5$ und $t_2 = 5$ in Gleichung von h' und h'', um die Koordinaten von B' und C' zu berechnen:

$$\overrightarrow{x_{B'}} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} \implies B'(18 \mid 7 \mid 0)$$

$$\overrightarrow{x_{C'}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 13 \\ 0 \end{pmatrix} \implies C'(12 \mid 13 \mid 0)$$

3. Schritt:

Die Gleichung der Geraden h, auf welcher die Schattenkante liegt, ergibt sich nun zu:

$$h : \overrightarrow{x} = B' + u \cdot \overrightarrow{B'C'} = \begin{pmatrix} 18 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 12-18 \\ 13-7 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3.1 ▶ **Begründen der einzelnen Schritte zur Berechnung der Koordinaten von Punkt D** (10BE)

1. Schritt:

Im ersten Schritt wird Vektor $\overrightarrow{BC}$ zur Kante $\overline{BC}$ gebildet. Dieser Vektor verläuft parallel zum Vektor $\overrightarrow{AD}$ und wird später entscheidend für die Bestimmung der Koordinaten von Punkt D sein.

2. Schritt:

Im zweiten Schritt wird Gerade g_{AD} gebildet, auf dieser Geraden liegt die Kante $\overline{AD}$. Als Aufpunkt der Geraden g_{AD} fungiert Punkt A, als Richtungsvektor wird hier $\overline{BC}$ verwendet, da dieser Vektor bekannt und parallel zur Kante $\overline{AD}$ ist.

3. Schritt:

Aus der Aufgabenstellung ist bekannt, dass Punkt D in der x_2x_3 - Ebene liegt. Das heißt, dass zur Bestimmung seiner Koordinaten, ist eine Bestimmung des Schnittpunkts von g_{AD} mit der x_2x_3 - Ebene notwendig.
Im dritten Schritt wird Gerade g_{AD} zuerst als Vektor zusammengefasst, um diesen später in die Koordinatenform der x_2x_3 - Ebene einzusetzen.

- Die Koordinatenform der x_2x_3 - Ebene ist: $x_1 = 0$.
- Gerade g_{AD} als Vektor: $g_{\text{AD}}: \ \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 8-6\cdot t \\ 6\cdot t \\ 6 \end{pmatrix}$

Nachdem g_{AD} als Vektor in die Koordinatenform der x_2x_3 - Ebene eingesetzt wurde, wird der zum Schnittpunkt (Punkt D) zugehörige Parameterwert für t bestimmt.

4. Schritt:

Im vierten Schritt wird der im vorherigen Schritt bestimmte Parameterwert für t in die Geradengleichung von h eingesetzt um die Koordinaten von D zu bestimmen.
$\Longrightarrow$ Die Koordinaten von D sind: $D(0 \mid 8 \mid 6)$.

3.2 **► Zeigen, dass sich die Schienen in Z treffen und senkrecht aufeinander stehen**

Bevor du Zeigen kannst, dass die Schienen sich in Z treffen, bestimmst du Gleichungen der Geraden s_1 und s_2, auf welchen die Stahlschienen liegen:

- Gerade s_1 mit Aufpunkt M und Richtungsvektor $\overrightarrow{MS}$
- Gerade s_2 mit Aufpunkt A und Richtungsvektor $\overrightarrow{AD}$

Nachdem du die Geradengleichungen bestimmt hast, setzt du diese gleich und bestimmst deren Schnittpunkt Z. Somit zeigst du, dass die Geraden sich in Z schneiden.
Um zu zeigen, dass die Stahlschienen senkrecht aufeinander stehen, berechnest du anschließend das Skalarprodukt der Richtungsvektoren der Geraden s_1 und s_2. Ist dieses gleich Null, so hast du bewiesen, dass die Stahlschienen senkrecht aufeinander stehen.

1. Schritt: Geradengleichungen der Geraden s_1 und s_2

- $s_1: \ \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} + v\cdot \begin{pmatrix} 0-5 \\ 0-5 \\ 10-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} + v\cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$
- $s_2: \ \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + w\cdot \begin{pmatrix} 0-8 \\ 8-0 \\ 6-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + w\cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$

2. Schritt: Schneiden der Geraden s_1 und s_2

$$s_1 = s_2$$

$$\begin{pmatrix}5\\5\\5\end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix}-5\\-5\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\0\\6\end{pmatrix} + w \cdot \begin{pmatrix}-8\\8\\0\end{pmatrix} \qquad \Big| - \begin{pmatrix}5\\5\\5\end{pmatrix} \ \Big| -w \cdot \begin{pmatrix}-8\\8\\0\end{pmatrix}$$

$$v \cdot \begin{pmatrix}-5\\-5\\5\end{pmatrix} - w \cdot \begin{pmatrix}-8\\8\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\0\\6\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5\\5\\5\end{pmatrix}$$

$$v \cdot \begin{pmatrix}-5\\-5\\5\end{pmatrix} - w \cdot \begin{pmatrix}-8\\8\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-5\\1\end{pmatrix}$$

Resultierendes lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lll}
\text{I} & -5 \cdot v + 8 \cdot w = 3 & \\
\text{II} & -5 \cdot v - 8 \cdot w = -5 & \\
\text{III} & 5 \cdot v - 0 \cdot w = 1 & \mid :5 \\
\hline
\text{I} & -5 \cdot v + 8 \cdot w = 3 & \\
\text{II} & -5 \cdot v - 8 \cdot w = -5 & \\
\text{III} & v = \frac{1}{5} & v = \frac{1}{5} \text{ in I \& II} \\
\hline
\text{I} & -5 \cdot \frac{1}{5} + 8 \cdot w = 3 \ \Leftrightarrow \ w = \frac{1}{2} & \\
\text{II} & -5 \cdot \frac{1}{5} - 8 \cdot w = -5 \ \Leftrightarrow \ w = \frac{1}{2} &
\end{array}$$

3. Schritt: Berechnen der Koordinaten des Schnittpunkts von s_1 und s_2

Setze entweder $v = \frac{1}{5}$ in die Geradengleichung von s_1 oder $w = \frac{1}{2}$ in die Geradengleichung von s_2 ein, um die Koordinaten des Schnittpunkts (Punkt Z) zu bestimmen:

$$s_1 : \ \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix}5\\5\\5\end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix}-5\\-5\\5\end{pmatrix} \text{ mit } v = \tfrac{1}{5}:$$

$$\overrightarrow{x_Z} = \begin{pmatrix}5\\5\\5\end{pmatrix} + \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix}-5\\-5\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5-1\\5-1\\5+1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\4\\6\end{pmatrix} \implies Z(4 \mid 4 \mid 6)$$

Da die von dir bestimmten Koordinaten von Punkt Z mit denen aus der Aufgabenstellung übereinstimmen, hast du gezeigt, dass sich die Stahlschienen bei $Z(4 \mid 4 \mid 6)$ treffen.

4. Schritt: Zeigen, dass die Schienen senkrecht aufeinander stehen

Bilde das Skalarprodukt der Richtungsvektoren von s_1 und s_2, um zu zeigen, dass die Stahlschienen senkrecht aufeinander stehen:

$$\overrightarrow{AD} \circ \overrightarrow{MS} = \begin{pmatrix}-8\\8\\0\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}-5\\-5\\5\end{pmatrix} = -8 \cdot (-5) + 8 \cdot (-5) + 0 \cdot 5 = 40 - 40 + 0 = 0$$

Da sich das Skalarprodukt der Richtungsvektoren der Geraden, auf welchen die Stahlschienen liegen, zu Null ergibt, stehen die Schienen senkrecht aufeinander.