a) **► Geradengleichungen u_1 und u_2 angeben** (9P)

Aus der Aufgabenstellung ist bekannt:

- U-Boot U_1 passiert die Punkte $P_0\,(4 \mid 14 \mid -4)$ und $P_1\,(6 \mid 11 \mid -4)$.
- U-Boot U_2 passiert die Punkte $Q_0\,(11 \mid 9 \mid -14)$ und $Q_1\,(9 \mid 6 \mid -12)$.

Eine Gerade g hat allgemein die Gleichung

$g : \vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{q}$,

wobei $\vec{p}$ der Stützvektor und $\vec{q}$ der Richtungsvektor ist. Wähle z.B. für die beiden Geraden $\overrightarrow{OP_0}$ bzw. $\overrightarrow{OQ_0}$ als **Stützvektor** und die Vektoren $\overrightarrow{P_0P_1}$ bzw. $\overrightarrow{Q_0Q_1}$ als **Richtungsvektoren**.

► Geschwindigkeiten der U-Boote nachweisen

Überlege, was „Geschwindigkeit" bedeutet: Sie gibt dir an, welche **Strecke** in welcher **Zeit** zurückgelegt wird. Aus der Aufgabenstellung weißt du:

- U-Boot U_1 legt die Strecke von P_0 zu P_1 in 1 Minute zurück.
- U-Boot U_2 legt die Strecke von Q_0 zu Q_1 in 1 Minute zurück.

Du kannst also so vorgehen:

- Berechne zunächst die Länge der Strecken $\overline{P_0P_1}$ und $\overline{Q_0Q_1}$.
- Eine Einheit im Koordinatensystem entsprechen 100 m. Multipliziere die Ergebnisse also mit 100, um die Länge in Meter zu erhalten.
- Diese Strecken legen die beiden U-Boote jeweils in 1 Minute zurück. Formuliere die Geschwindigkeit in Meter pro Minute.

► Begründen, dass u_1 und u_2 nicht parallel sind

Zwei Geraden sind parallel, wenn ihre Richtungsvektoren parallel verlaufen. Dies wiederum ist der Fall, wenn die Richtungsvektoren **Vielfache** voneinander sind.

Formal kannst du das so formulieren: Geraden u_1 und u_2 sind parallel, wenn für die Richtungsvektoren $\overrightarrow{P_0P_1}$ und $\overrightarrow{Q_0Q_1}$ gilt:

$\overrightarrow{P_0P_1} = k \cdot \overrightarrow{Q_0Q_1}$.

Prüfe nach, ob diese Gleichung erfüllt ist.

► Kleinsten Abstand der U-Boote untersuchen

Hier ist wichtig, dass du die Aufgabenstellung genau liest: Es ist nicht nach dem kleinsten Abstand der **Geraden** u_1 und u_2 gefragt, sondern nach dem kleinsten Abstand der **U-Boote**.

Zu Beginn, um 12:21 Uhr, befindet sich U_1 in Punkt P_0 und U_2 in Punkt Q_0. Du weißt, dass sie sich geradlinig entlang des Richtungsvektors bewegen und die Strecke, die durch den Richtungsvektor beschrieben wird, in einer Minute zurücklegen.

Das heißt: Wenn du $r = 1$ in die Geradengleichungen einsetzt, so erhältst du die Position der U-Boote nach einer Minute; für $r = 2$ die Position nach zwei Minuten; für $r = 3$ die Position nach drei Minuten etc.

Die Geradengleichungen geben dir also an, in welcher Position sich U_1 bzw. U_2 nach r Minuten befinden.

Du kannst so vorgehen:

- Fasse die Geradengleichung jeweils in einem **Vektor** $\overrightarrow{OB_1}$ bzw. $\overrightarrow{OB_2}$. zusammen. Er beschreibt die Position, an der sich das jeweilige U-Boot nach r Minuten befindet.
- Gesucht ist der **kleinste Abstand** der beiden U-Boote. Berechne also den Abstand $\overline{B_1B_2}$. Er gibt dir an, wie weit die beiden U-Boote nach r Minuten voneinander entfernt sind.
- Untersuche, welchen kleinsten Wert dieser Abstand annehmen kann.

b) ▶ **Entfernung von U_2 und Kreuzfahrtschiff untersuchen** (11P)

Laut Aufgabenstellung liegt die Meeresoberfläche in der x-y-Ebene. Der Punkt, in dem das U-Boot U_2 die Meeresoberfläche erreicht, ist also der Punkt, in dem die Gerade u_2 die x-y-Ebene durchstößt.

Alle Punkte in der x-y-Ebene haben die z-Koordinate $z = 0$. Berechne also den Punkt auf der Geraden u_2, für den gilt: $z = 0$.

Du kannst so vorgehen:

- Der Punkt, in dem das U-Boot U_2 an die Meeresoberfläche kommt, sei der Punkt M. Er hat allgemein die Koordinaten $M\,(m_1 \mid m_2 \mid 0)$. Setze diese Koordinaten in die Geradengleichung von u_2 ein und löse nach r auf.
- Bestimme dann die vollständigen Koordinaten von M.
- Berechne zuletzt den Abstand der Punkte M und K.

c) ▶ **Abstand von allgemeinem Punkt X und F angeben** (7P)

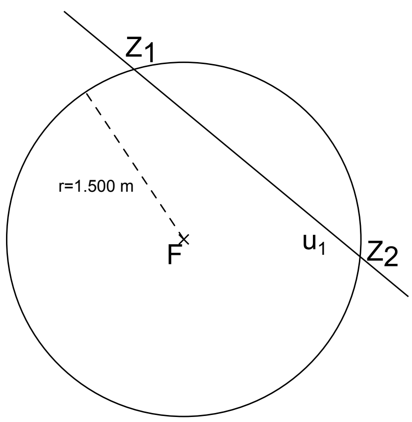
Der Punkt X soll ein allgemeiner Punkt auf der Geraden u_1 sein. Seine Koordinaten folgen aus der Geradengleichung der Gerade u_1:

$X\,(4 + 2r \mid 14 - 3r \mid -4)$.

Gesucht ist der Abstand der Punkte X und F. Berechne also die Länge der Strecke $\overline{XF}$.

▶ **Punkte bestimmen, wo Übertragung noch möglich ist**

Eine Skizze der Situation kann dir bei der Lösung dieser Aufgabe helfen:



Der Bereich, in dem sich das U-Boot U_1 befinden muss, um noch eine Nachricht an die Station senden zu können, kann als **Kreis** mit einem Radius von 1.500 m dargestellt werden. Die beiden Punkte, an denen eine Übertragung gerade noch möglich ist, sind die beiden Schnittpunkte von Kreis und Gerade. Wir haben sie in nebenstehender Abbildung mit Z_1 und Z_2 bezeichnet.

Diese beiden Punkte liegen auf der Geraden u_1 und haben vom Punkt F einen Abstand von 1.500 m. Da eine LE im Koordinatensystem 100 m in der Wirklichkeit entspricht, sind diese beiden Punkte vom Punkt F 15 LE entfernt.

Den Abstand, den ein beliebiger Punkt X auf der Geraden u_1 vom Punkt F hat, hast du soeben bestimmt. Dieser Abstand soll nun 15 LE betragen. Du kannst so vorgehen:

- Setze den Term für den allgemeinen Abstand gleich 15.
- Löse diese Gleichung nach r. Du erhältst zwei Lösungen r_1 und r_2.
- Setze r_1 und r_2 anschließend in die Geradengleichung von u_1 ein, um die Koordinaten der beiden Punkte Z_1 und Z_2 zu erhalten.

► Zeitfenster angeben, in dem Übertragung möglich ist

Du weißt, dass das U-Boot U_1 die durch den Richtungsvektor $\overrightarrow{P_0P_1}$ beschriebene Strecke in einer Minute zurücklegt und dass es sich um 12:21 Uhr im Punkt P_0 befindet. Für $r = 2$ erhältst du also die Position nach zwei Minuten um 12:23 Uhr, für $r = 3$ nach drei Minuten um 12:24 Uhr etc.

d) **► Lösungsweg zur Berechnung der Koordinaten von D_2 entwickeln** (3P)

Aus der Aufgabenstellung weißt du:

- Es gibt einen Punkt auf der Geraden u_1, nämlich D_1, in dem der Abstand der Geraden u_1 und u_2 minimal wird.
- Gesucht ist nun der Punkt D_2 auf der Geraden u_2, in dem ebenfalls der Abstand der Geraden u_1 und u_2 minimal wird.

Der Abstand von einem Punkt zu einer Geraden wird immer **senkrecht** zur Geraden gemessen. Der Abstand kann also dargestellt werden, indem man das **Lot** von D_1 auf die Gerade u_2 fällt. Da der Abstand von u_1 und u_2 im Punkt D_1 minimal wird, steht dieses Lot auch senkrecht auf u_1. Dabei gibt es einen **Lotfußpunkt** auf der Geraden u_2. Der minimale Abstand der Geraden ist also zugleich der Abstand von D_1 zum Lotfußpunkt. Also ist der Lotfußpunkt auch der Punkt auf u_2, welcher den kleinsten Abstand zum Kurs u_1 hat und damit unser gesuchter Punkt D_2.