a) ▸ **Wahrscheinlichkeitsverteilung von X berechnen** (8P)

Die „6“ tritt mit einer Wahrscheinlichkeit von $0,1$ auf, die „1“ mit einer Wahrscheinlichkeit von $0,2$. Die verbleibenden $0,7$ werden gleichmäßig auf die übrigen Zahlen 2, 3, 4 und 5 verteilt, sodass sich die Wahrscheinlichkeitsverteilung ergibt:

Augenzahl	1	2	3	4	5	6
Wahrscheinlichkeit	$0,2$	$0,175$	$0,175$	$0,175$	$0,175$	$0,1$

▸ **Erwartungswert und Standardabweichung berechnen**

Als Erwartungswert μ ergibt sich:

$$\mu = 0,2 \cdot 1 + 0,175 \cdot 2 + 0,175 \cdot 3 + 0,175 \cdot 4 + 0,175 \cdot 5 + 0,1 \cdot 6 = 3,25$$

Als Standardabweichung σ ergibt sich:

$$\begin{aligned} \sigma &= \sqrt{V(X)} \\ &= \sqrt{0,2 \cdot (1-3,25)^2 + 0,175 \cdot \left((2-3,25)^2 + (3-3,25)^2 + (4-3,25)^2 + (5-3,25)^2\right) + 0,1 \cdot (6-3,25)^2} \\ &= \sqrt{2,6875} \approx 1,64 \end{aligned}$$

b) ▸ **Wahrscheinlichkeiten berechnen** (13P)

1. Schritt: Erste Sechs im Fünften Wurf

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Sechs gewürfelt wird, liegt bei $p_6 = 0,1$, die des Gegenereignisses, dass keine Sechs gewürfelt wird, liegt demnach bei $p_{\overline{6}} = 0,9$.

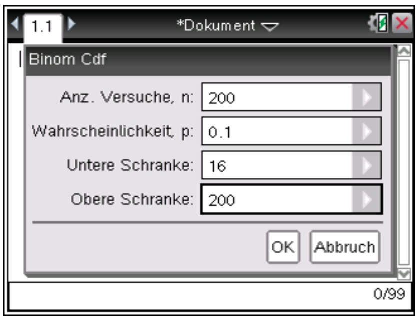
Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass erst im fünften Wurf die erste Sechs gewürfelt wird, entspricht der Wahrscheinlichkeit dafür, dass 4 Mal keine Sechs und 1 Mal eine Sechs gewürfelt wird:

$P = (0,9)^4 \cdot 0,1 = 0,06561$. Mit einer Wahrscheinlichkeit von $6,6\%$ wird erst im fünften Wurf die erste Sechs gewürfelt.

2. Schritt: Wahrscheinlichkeit für mindestens 16 Sechsen

X ist nun binomialverteilt mit $p = 0,1$ und $n = 200$. Hier ist nach der Wahrscheinlichkeit $P(X \geq 16)$ gefragt:

Im `Calculator`-Modus deines CAS kannst du die Wahrscheinlichkeit mit `menu → 5 → 5 → E: BinomialCdf` berechnen.



Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa $85,69\%$ werden in 200 Würfen mindestens 16 Sechsen geworfen.

▸ **Wahrscheinlichkeit für $1,5\sigma$-Abweichung**

Sei X wieder die Anzahl der geworfenen Sechsen. X ist dieses Mal binomialverteilt mit $p = 0,1$ und $X = 350$. s

Verlangt ist die Wahrscheinlichkeit $P(\mu - 1,5\sigma \leq X \leq \mu + 1,5\sigma)$.

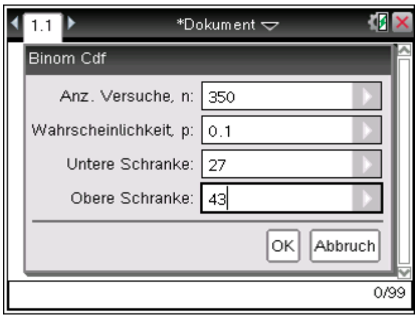
Achtung: Erwartungswert und Standardabweichung von X entsprechen nicht den berechneten Werten aus Teilaufgabe a):

$$\mu = n \cdot p = 0,1 \cdot 350 = 35, \qquad \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{35 \cdot 0,9} \approx 5,61$$

Setze diese Werte ein:

$$P(35 - 1,5 \cdot 5,61 \leq X \leq 35 + 1,5 \cdot 5,61) = P(26,585 \leq X \leq 43,415) = P(27 \leq X \leq 43)$$

Im `Calculator`-Modus deines CAS kannst du die Wahrscheinlichkeit mit `menu → 5 → 5 → E: BinomialCdf` berechnen.



Mit einer Wahrscheinlichkeit von $87,11\%$ weicht die Anzahl der Sechsen um um höchstens $1,5\sigma$ vom Erwartungswert ab.

▶ Entwicklung der relativen Häufigkeit beschreiben

Auf der waagerechten Achse wird die Anzahl der durchgeführten Versuche abgetragen; auf der senkrechten Achse finden wir die aus den bisherigen Versuchen berechnete relative Häufigkeit des Ereignisses „Sechs gewürfelt“.

Wir sehen schön, wie sich die relative Häufigkeit mit zunehmendem Stichprobenumfang „einpendelt“. Am Anfang finden wir größere Ausreißer, die von $p \approx 0,1$ bis etwa $p \approx 0,33$ reichen. Je mehr Versuche durchgeführt werden, desto mehr werden diese Ausreißer relativiert und ausgeglichen.

Je mehr Versuche durchgeführt werden, desto eher nähert die relative Häufigkeit dem **tatsächlichen, theoretischen** Wert von $\frac{1}{6} = 0,1\overline{6}$ an.

c) ▶ Hypothesentest beschreiben (16P)

1. Schritt: Hypothesen und Zufallsgröße

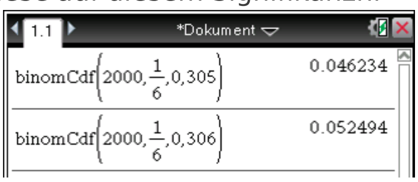
Es stehen sich zwei Hypothesen gegenüber. Die Nullhypothese H_0 geht davon aus, dass die Wahrscheinlichkeit, eine Sechs zu würfeln, bei $p_0 \geq \frac{1}{6}$ liegt, während die Hypothese H_1 von einer Wahrscheinlichkeit $p_1 < \frac{1}{6}$ ausgeht.

Sei X die Anzahl der geworfenen Sechsen. X ist bei wahrer Nullhypothese binomialverteilt mit $n = 2000$ und $p = \frac{1}{6}$.

2. Schritt: Entscheidungsregel

Es soll ein Hypothesentest auf einem Signifikanzniveau von 5% durchgeführt werden. Gesucht ist nun eine Zahl k, für die die Nullhypothese auf diesem Signifikanzniveau gerade noch angenommen wird:

$P(Z \leq k) \leq 0,05$. Suche eine solche Zahl durch systematisches probieren mit dem CAS.



Wenn weniger als 306 Sechsen gewürfelt werden, wird die Nullhypothese $H_0 : p_0 \geq \frac{1}{6}$ abgelehnt. Es ergeben sich also der Ablehnungsbereich $A = \{0, \ldots, 305\}$ und der Annahmebereich $\overline{A} = \{306, \ldots, 2000\}$.

3. Schritt: Fehler 1. und 2. Art

Der Fehler 1. Art tritt ein, wenn die Nullhypothese richtig ist, aber abgelehnt wird. Dies entspricht im Sachzusammenhang dem Fall, dass die Wahrscheinlichkeit, eine Sechs zu würfeln, bei $\frac{1}{6}$ liegt, aber weniger als 306 Sechsen geworfen werden.

Der Fehler 2. Art tritt ein, wenn die Nullhypothese falsch ist, aber dennoch akzeptiert wird. In unserem Kontext entspricht dies dem Fall, dass die Wahrscheinlichkeit, eine Sechs zu würfeln, kleine als $\frac{1}{6}$ ist, aber dennoch mindestens 306 Sechsen gewürfelt werden.

▶ Verträglichkeit mit Hypothese untersuchen

Es werden 307 Sechsen gewürfelt. Dies ist mit der Nullhypothese $H_0 : p_0 \geq \frac{1}{6}$ verträglich, da diese bei 307 Treffern **nicht** abgelehnt werden kann.

▶ Fehlerwahrscheinlichkeit ermitteln

Die Aufgabe, so wie sie formuliert ist, macht leider wenig Sinn. Der Würfel soll **fair** sein. Die Wahrscheinlichkeit, eine Sechs zu würfeln, liegt also bei $p = \frac{1}{6}$.

Nun soll die Wahrscheinlichkeit dafür berechnet werden, dass fälschlicherweise davon ausgegangen wird, dass die Sechs nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 10 % auftritt.

Es ist also nach der Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art gefragt. Darüber können wir mit der Entscheidungsregel aus (1) aber nur sagen, dass er mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 5 % auftritt, was aber schon Voraussetzung in der Aufgabenstellung war.

Möglicherweise liegt hier ein Fehler in der Aufgabe vor. Wir wollen davon ausgehen, dass der Würfel in Wirklich **gefälscht** ist und die Sechs nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 10 % geworfen wird. Es soll die Wahrscheinlichkeit dafür berechnet werden, dass er **dennoch** als korrekter Würfel eingeschätzt wird.

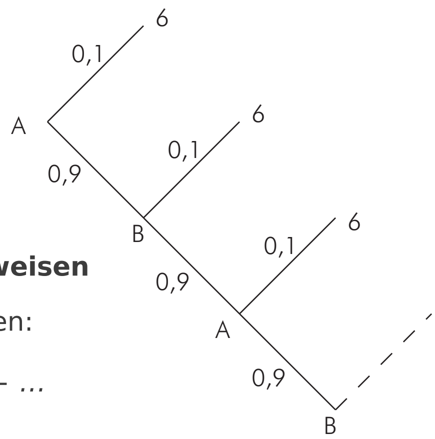
Nun hätten wir die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art zu berechnen. Sei X die Anzahl der geworfenen Sechsen mit dem gefälschten Würfel. X ist binomialverteilt mit $n = 2.000$ und $p = 0,1$. Die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 2. Art entspricht genau der Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich bei einer Wahrscheinlichkeit von $0,1$ die Anzahl der geworfenen Sechsen im Annahmebereich der Nullhypothese befindet:

$$P(X \geq 306) = 1 - P(X \leq 305) = 1 - 1 = 0$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 0% wird die Nullhypothese angenommen, obwohl die tatsächliche Wahrscheinlichkeit, eine Sechs zu würfeln, nur bei 10% liegt.

d) ▶ **Baumdiagramm** (13P)

A beginnt das Spiel. Mit einer Wahrscheinlichkeit von $0,1$ würfelt er eine Sechs und gewinnt damit das Spiel. Würfelt er keine Sechs $(0,9)$, so ist B an der Reihe. Für ihn gilt dann das gleiche.



▶ **Beziehung der Wahrscheinlichkeiten nachweisen**

Berechne zunächst die beiden Wahrscheinlichkeiten:

$$P(G_A) = 0,1 + 0,9^2 \cdot 0,1 + 0,9^4 \cdot 0,1 + 0,9^6 \cdot 0,1 + \ldots$$

$$\begin{aligned} P(G_B) &= 0,9 \cdot 0,1 + 0,9^3 \cdot 0,1 + 0,9^5 \cdot 0,1 + \ldots \\ &= 0,9 \cdot \left(0,1 + 0,9^2 \cdot 0,1 + 0,9^4 \cdot 0,1 + 0,9^6 \cdot 0,1 \ldots\right) \\ &= 0,9 \cdot P(G_A) \end{aligned}$$

▶ **Wahrscheinlichkeit berechnen**

Es gibt nur zwei mögliche Ausgänge: „A gewinnt“ und „B gewinnt“, d.h. $P(G_A) + P(G_B) = 1$. Weiterhin weißt du, dass $P(G_B) = 0,9 \cdot P(G_A)$:

$$\begin{aligned} P(G_A) + 0,9 \cdot P(G_A) &= 1 \\ 1,9 \cdot P(G_A) &= 1 \qquad |:1,9 \\ P(G_A) &= 0,5263 \end{aligned}$$

Spieler A gewinnt mit einer Wahrscheinlichkeit von $52,63\%$.