### ► Nachweis der Rechtwinkligkeit des Dreiecks und Gleichung des Umkreises (5BE)

Mit der nebenstehenden Zeichnung ist erkennbar, dass das Dreieck einen rechten Winkel beim Punkt $C$ hat. Um die nachzuweisen, muss gezeigt werden, dass das Skalarprodukt der anliegenden Seitenvektoren $\overrightarrow{CA}$ und $\overrightarrow{CB}$ mit

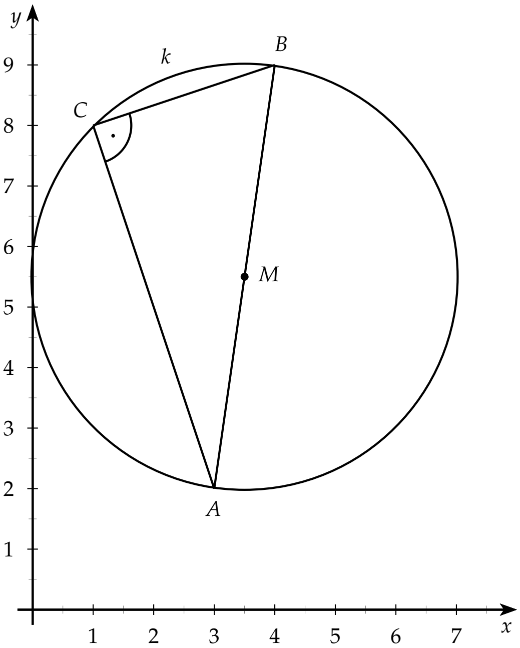
$$\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-6\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix}4\\9\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$$

Null beträgt. Das Skalarprodukt ist dabei:

$$\overrightarrow{CA} \circ \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix}2\\-6\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = 6-6=0$$

Damit ist die Rechtwinkligkeit nachgewiesen.




Allgemein ist der Mittelpunkt des Umkreises der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten in einem Dreieck. Da dieses Dreieck jedoch rechtwinklig ist, fällt der Umkreismittelpunkt $M$ mit dem Mittelpunkt der Basis, also dem Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ zusammen. Vom Ursprung gelangt man daher zum Mittelpunkt auf folgende Weise

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}4-3\\9-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3,5\\5,5\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad M(3,5\,|\,5,5)$$

Der Radius des Umkreises ist der Abstand von $M$ zu einem der Eckpunkte des Dreiecks, z.B. zum Punkt $A$:

$$r = \overline{MA} = |\overrightarrow{MA}| = \left|\begin{pmatrix}3-3,5\\2-5,5\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}-0,5\\-3,5\end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-0,5)^2+(-3,5)^2} = \sqrt{12,5}$$

Der Umkreis mit dem Mittelpunkt $M(3,5\,|\,5,5)$ und dem Radius $r=\sqrt{12,5}$ hat damit die Kreisgleichung:

$$k:\ (x-3,5)^2+(y-5,5)^2 = \left(\sqrt{12,5}\right)^2 = 12,5$$

### Berechnung der Koordinaten des Punktes $C_1$ (3BE)

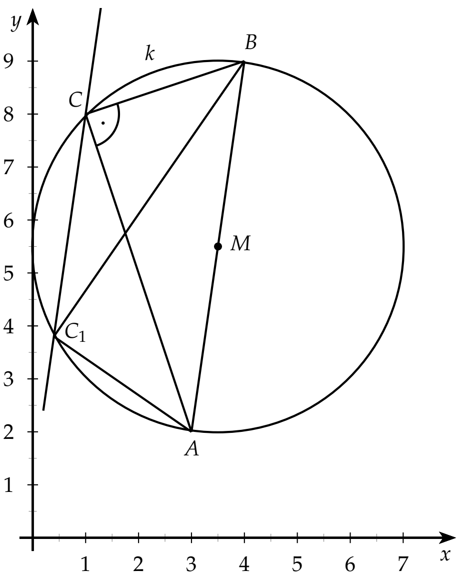
Der gesuchte Punkt $A_1$ entspricht dem Schnittpunkt einer zur Strecke $\overline{BD}$ parallelen Geraden $g$, die durch den Punkt $A$ geht (vgl. Zeichnung).

Da $g$ parallel zur Strecke $\overline{BA}$ ist, gilt für ihre Steigung $m$:

$$m = \frac{y_B-y_A}{x_B-x_A} = \frac{2-9}{3-4} = \frac{-7}{-1} = 7$$

Mit dem Punkt $C(1\,|\,8) \in g$ erhält man $g$ zu:

$$g:\ y = 7x+c$$
$$8 = 7\cdot 1 + c$$
$$c = 1$$




Die Gerade hat also die Geradengleichung

$g: \; y = 7x + 1$

Die Schnittpunkte von $k$ mit der Geraden werden durch Einsetzen der Geraden- in die Kreisgleichung berechnet:

$$g \cap k: \qquad (x-3{,}5)^2 + (\underbrace{7x+1}_{=y} - 5{,}5)^2 = 12{,}5$$

$$x^2 - 7x + 12{,}25 + 49x^2 - 63x + 20{,}25 = 12{,}5$$

$$50x^2 - 70x + 20 = 0$$

$$x^2 - \frac{7}{5}x + \frac{2}{5} = 0$$

$$x_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad S_1(1\,|\,8)$$

$$x_2 = \frac{2}{5} \quad \Rightarrow \quad S_2\left(\frac{2}{5}\,\middle|\,\frac{19}{5}\right)$$

Der Schnittpunkt $S_1$ entspricht dem Punkt $C$, damit ist der Schnittpunkt $S_2$ der gesuchte Punkt $C_1$.

Der gesuchte Punkt ist $C_1\left(\frac{2}{5}\,\middle|\,\frac{19}{5}\right)$.