**Aufgabenstellung:**

Beim Spielen mit einem Würfel stellt ein Spieler fest, dass die Augenzahl „1“ überdurchschnittlich häufig, die Augenzahl „6“ dagegen relativ selten auftritt. Dies führt zu der Vermutung, dass die Wahrscheinlichkeit für das Würfeln einer „6“ nur 10 %, einer „1“ aber 20 % beträgt und die anderen Augenzahlen mit untereinander gleichen Wahrscheinlichkeiten auftreten.
Gehen Sie zunächst davon aus, dass die Vermutung zutrifft.

a) Die Zufallsgröße $X$ gibt die Augenzahl beim Werfen dieses Würfels an. (8P)

(1) Berechnen Sie die vollständige Wahrscheinlichkeitsverteilung von $X$.

(2) Berechnen Sie Erwartungswert und Standardabweichung von $X$.

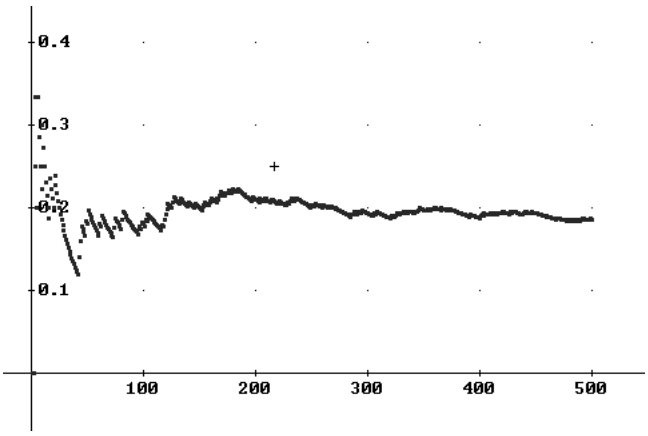
b) Mit dem Würfel wird mehrmals nacheinander gewürfelt. (13P)

(1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass erst im fünften Wurf zum ersten Mal eine Sechs auftritt.

(2) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass in 200 Würfen mindestens 16 Sechsen auftreten.

(3) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl der Sechsen um höchstens $1{,}5 \cdot \sigma$ vom Erwartungswert abweicht, wenn 350-mal geworfen wird.

(4) Ein $n$-facher fairer Würfelwurf ist mit Hilfe von CAS simuliert worden. Dann sind die relativen Häufigkeiten für das Würfelergebnis „Sechs gewürfelt“ für eine zunehmende Anzahl von Versuchen berechnet und in der nebenstehenden Graphik dargestellt worden.




Interpretieren Sie die in der Graphik gezeigte Entwicklung der relativen Häufigkeit.

c) Die Vermutung, dass die „6“ nur mit einer Wahrscheinlichkeit von weniger als $1/6$ auftritt, soll getestet werden. Dazu wird der Würfel 2.000-mal geworfen. (16P)

(1) Beschreiben Sie einen vollständigen Hypothesentest zum Signifikanzniveau 5 % (Zufallsgröße, Fehler 1. und 2. Art im Sachzusammenhang, Entscheidungsregel).

(2) In den 2.000 Würfen erhält man 307-mal die „6“. Untersuchen Sie, ob dieses Ergebnis noch mit der geäußerten Vermutung verträglich ist.

(3) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass aufgrund der in (1) aufgestellten Entscheidungsregel davon ausgegangen wird, dass eine „6“ nur in höchstens 10 % der Würfe auftritt, obwohl es sich um einen fairen Würfel handelt.

d) A und B würfeln abwechselnd nacheinander. Es soll derjenige gewinnen, der zuerst eine „6“ geworfen hat. A beginnt und schließlich würfelt einer von beiden die „6“. (Es gelte hier wieder $P(„6“) = 0{,}1$.) (13P)

(1) Stellen Sie die Spielsituation zunächst in einem Baumdiagramm dar und zeigen Sie, dass für die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse $G_A$ : „A gewinnt“ und $G_B$: „B gewinnt“ gilt: $P(G_B) = 0{,}9 \cdot P(G_A)$.

(2) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass A gewinnt.