a) ▶ **Berechnung der drei Wahrscheinlichkeiten** (12P)

(1) Wahrscheinlichkeit für genau 17 Treffer bei 20 Versuchen

Die Zufallsvariable X, welche für die Anzahl der Treffer bei 20 Versuchen steht, ist eine mit $p = 0,904$ binomialverteilte Zufallsvariable. Die Wahrscheinlichkeit für eine solche Zufallsvariable berechnet sich über diese Formel:

$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot 0,904^k \cdot (1 - 0,904)^{n-k}$

Hier ist gefragt, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass Nowitzki bei 20 Würfen genau 17 - Mal trifft, also $n = 20$ und $k = 17$:

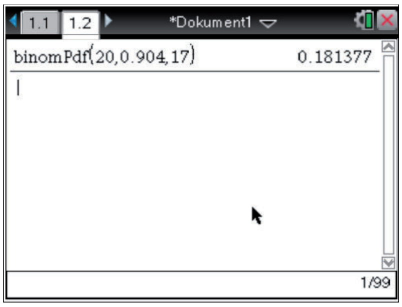
$$P(X = 17) = \binom{20}{17} \cdot 0,904^{17} \cdot (1 - 0,904)^{20-17}$$
$$P(X = 17) = \binom{20}{17} \cdot 0,904^{17} \cdot 0,096^3$$
$$P(X = 17) = 0,181$$

alternativ

Alternativ kann die Wahrscheinlichkeit auch über den Calculator - Modus des CAS berechnet werden. Verwende hierzu den Befehl `binomPdf(..)`. Dieser Befehl berechnet die Wahrscheinlichkeit für eine binomialverteilte Zufallsvariable und wird hier so angewandt:

`binomPdf(`n`,`p`,`k`)`

In der nebenstehenden Abbildung ist zu sehn wie die Wahrscheinlichkeit $P(X = 17)$ berechnet wird.



Die Wahrscheinlichkeit, dass Nowitzki bei 20 Würfen genau 17 - Mal trifft, liegt bei 0,181 (18,1 %).

(2) Wahrscheinlichkeit für höchstens 18 Treffer bei 20 Versuchen

Die Wahrscheinlichkeit, dass Nowitzki höchstens 18 Treffer bei 20 Versuchen erzielt, kannst du über das Gegenereignis bestimmen. Das Gegenereignis von höchstens 18 Treffer ist 19 Treffer, also $P(X = 19)$, und 20 Treffer, also $P(X = 20)$. Die Wahrscheinlichkeit $P(X \leq 18)$ berechnest du demnach so:

$$P(X \leq 18) = 1 - P(X = 19) - P(X = 20)$$
$$P(X \leq 18) = 1 - (\binom{20}{19} \cdot 0,904^{19} \cdot 0,096^1) - (\binom{20}{20} \cdot 0,904^{20} \cdot 0,096^0)$$
$$P(X \leq 18) = 1 - 0,282 - 0,133$$
$$P(X \leq 18) = 0,585$$

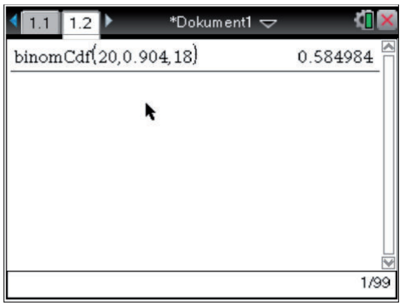
Die Wahrscheinlichkeit, dass Nowitzki bei 20 Würfen höchstens 18 - Mal trifft ist 0,585 (58,5 %).

alternativ

Alternativ kannst du auch hier die Wahrscheinlichkeit über den Calculator - Modus des CAS berechnen. Verwende hierzu den Befehl `binomCdf(..)`, dieser Befehl berechnet direkt die Wahrscheinlichkeit $P(X \leq k)$ und wird so angewandt:

`binomCdf(`n`,`p`,`k`)`

In der nebenstehenden Abbildung wurde die Wahrscheinlichkeit $P(X \leq 18)$ berechnet.



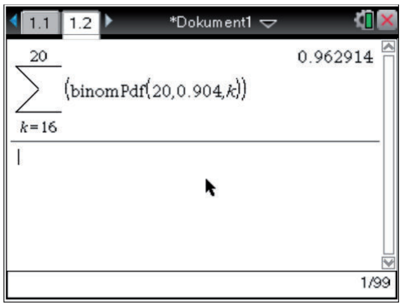
(3) Wahrscheinlichkeit für mindestens 16 Treffer bei 20 Würfen

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Nowitzki bei 20 Würfen mindestens 16 - Mal trifft, berechnest du, indem du die Summe aus den Wahrscheinlichkeiten für die Ereignisse deren k gleich oder größer 16 sind. Das heißt du musst diese Wahrscheinlichkeiten aufsummieren: $P(X = 16)$,...,$P(X = 20)$.
Es ergibt sich diese Summe:

$$P(X \geq 16) = P(X = 16) + ... + P(X = 20)$$

$$P(X \geq 16) = \sum_{k=16}^{20} P(X = k)$$

Diese Summe kann dir das CAS berechnen. Füge dazu eine Summe in das entsprechende Calculator - Dokument ein. Auch hier kannst du, wie im ersten Aufgabenteil, mit dem `binomPdf(..)` Befehl arbeiten. Hast du alles richtig eingegeben, sollte deine Berechnung so aussehen:
Die Wahrscheinlichkeit, dass Nowitzki bei 20 Würfen mindestens 16 - Mal trifft liegt bei 0,963 (96,3 %).



alternativ

Alternativ kannst du hier die Wahrscheinlichkeit auch über das Gegenereignis bestimmen. Das Ereignis tritt ein, wenn Nowitzki mindestens mit 16 von 20 einen Treffer erzielt, das Gegenereignis ist, wenn Nowitzki weniger als 16 - Mal trifft, also $P(X \leq 15)$. Die Wahrscheinlichkeit, dass Nowitzki mindestens 16 - Mal bei 20 Versuchen trifft, berechnet sich demnach so:

$$P(X \geq 16) = 1 - P(X \leq 15)$$

$$P(X \geq 16) = 1 - \texttt{binomCdf(20,0.904,15)} \qquad \text{(siehe Aufgabenteil 2)}$$

$$P(X \geq 16) = 0,963$$

b) ► **Untersuchung, ob die Trefferzahl signifikant unter dem Erwartungswert liegt** (10P)

X sei nun die Anzahl der Freiwürfe, bei denen Nowitzki einen Treffer erzielt. Auch hier ist X binomialverteilt, diesmal mit den Parametern $n = 263$ und $p = 0,904$.

Für den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ von X gilt:

$\mu = n \cdot p = 263 \cdot 0,904 = 237,752$

$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{263 \cdot 0,904 \cdot 0,096} \approx 4,78$

Es ist nun erkennbar, dass hier $\sigma > 3$ ist, daher kann die Formel benutzt werden, die in der Aufgabenstellung als Hinweis gegeben ist. Somit ergibt sich:

$$\begin{aligned} P(X \geq \mu - 1,64\sigma) &\approx 0,95 \\ P(X \geq 137,752 - 1,64 \cdot 4,78) &\approx 0,95 \\ P(X \geq 229,913) &\approx 0,95 \end{aligned}$$

Diese Wahrscheinlichkeit besagt, dass X mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 95% einen Wert von mindestens 230 annimmt $-$ und somit auch, dass X mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 5% einen Wert **kleiner** als 230 annimmt.

Nowitzki hat in der Saison 231 Mal getroffen. Dieser Wert liegt in dem Bereich, der mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% eintritt.

Daher ist eine Trefferquote von 231 auf dem Signifikanzniveau von 5% **keine** signifikante Abweichung nach unten. Der Sportreporter hat mit seiner Meinung unrecht.

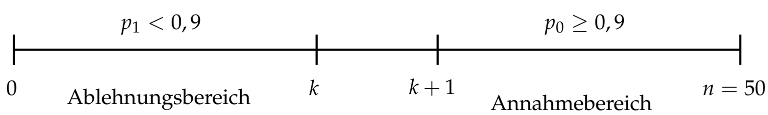
c) ► **Bestimmung der Entscheidungsregel des Tests** (12P)

Als X wird wiederum die Anzahl der Treffer bei Nowitzkis 50 Freiwürfen bezeichnet.

Es wird die Behauptung als Nullhypothese bezeichnet, die in dem Test verworfen werden soll. Daher wird als Nullhypothese zum Beispiel festgelegt, dass Nowitzkis Trefferquote **unverändert** geblieben ist. Somit besagt H_0: $p_0 \geq 0,904$.

Weiterhin wird als Gegenhypothese die Vermutung des Trainers verwendet, dass Nowitzkis Trefferquote nämlich gesunken ist. Es ist damit H_1: $p_1 < 0,904$.

Die Nullhypothese wird genau dann abgelehnt, wenn sich zeigt, dass Nowitzki bei den 50 Freiwürfen nur **sehr wenige** Treffer erzielt. Als Ablehnungsbereich wird damit $\overline{A} = \{0; 1; ...; k\}$ und als Annahmebereich $A = \{k+1; k+2; ...; 50\}$ festgelegt.



Bei wahrer Nullhypothese ist X $B_{50;0,904}$-verteilt. Das Signifikanzniveau von 10% gibt an, mit welcher maximalen Wahrscheinlichkeit X trotz dieser Verteilung einen Wert aus dem Ablehnungsbereich ($X \leq k$) annimmt. Es handelt sich hierbei um eine **Fehlerwahrscheinlichkeit**:

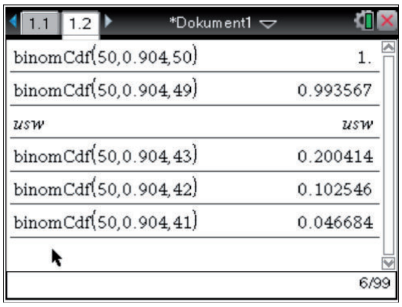
$P(X \leq k) \leq 0,1$

Nun gibt es 2 Möglichkeiten diese Wahrscheinlichkeit zu bestimmen:

1. Möglichkeit:

Die erste Möglichkeit die Fehlerwahrscheinlichkeit $P(X \leq k) \leq 0,1$ zu berechnen führt über das systematische Probieren.

Da X $B_{50;0,904}$-verteilt ist, musst du ab einem $k = 50$ abwärts, jenes k suchen, bei dem das Signifikanzniveau von 10% das erste Mal unterschritten wird. Das systematische Probieren musst du mit Hilfe des CAS durchführen. Die Wahrscheinlichkeiten werden dabei wie im zweiten Aufgabenteil über den `binomCdf(..)` - Befehl berechnet. Ein solches systematisches Probieren wird exemplarisch in der nebenstehenden Abbildung gezeigt.



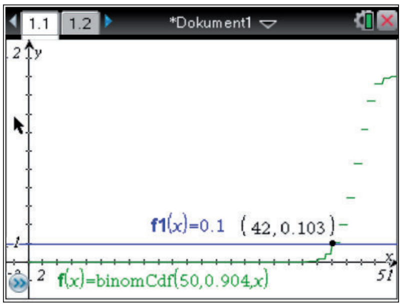
Wie du erkennen kannst, ist $k = 41$ die **letzte Zahl**, für die $P(X \leq k) \leq 0,1$ gilt.

2. Möglichkeit:

Die zweite Möglichkeit zu bestimmen, ab welchem k die Nullhypothese angenommen wird, also $P(X \leq k) \leq 0,1$ gilt, führt über den Graphs - Modus des CAS. Hier definierst du die $B_{50;0,904}$-verteilte Zufallsvariable X als Funktion in Abhängigkeit von x. x wird dabei als k verwendet und beschreibt die getroffenen Würfe bei insgesamt 50 Versuchen. Um das letzt k zu berechnen bei dem $P(X \leq k) \leq 0,1$ gilt, musst du hier, wie schon im ersten Aufgabenteil mit dem `binomCdf(..)` - Befehl arbeiten. Die Funktion f, welche die Wahrscheinlichkeiten von X beschreibt, sollte so aussehen:

$f(x) = \texttt{binomCdf(50,0.904,}x\texttt{)}$

Da du bestimmen willst, ab wann $P(X \leq k) \leq 0,1$ gilt, musst du f mit der Geraden $y = 0,1$ schneiden und den Schnittpunkt der beiden Graphen bestimmen. Hast du beide Funktionen in das entsprechende Graphs - Dokument eingetragen, bestimmst du über diese Befehlsfolge den Schnittpunkt:



menu → 6: Graph analysieren → 4: Schnittpunkt

Wie du erkennen kannst, ist auch hier $k = 41$ die **letzte Zahl**, für die $P(X \leq k) \leq 0,1$ gilt.

Es ergibt sich der Ablehnungsbereich $\overline{A} = \{0; 1; ...; 41\}$.

Wenn Nowitzki nur maximal 41 Mal trifft, dann hat der Trainer mit seiner Vermutung, dass die Trefferquote gesunken ist, Recht. Dies ist auf dem Signifikanzniveau von 10% gesichert.

d) **►Bestimmung der Anzahl der Freiwürfe, die Nowitzki hätte ausführen dürfen** (6P)

X sei die Anzahl der Würfe, die Nowitzki nach der „$1+1$-Regel“ hätte ausführen dürfen.

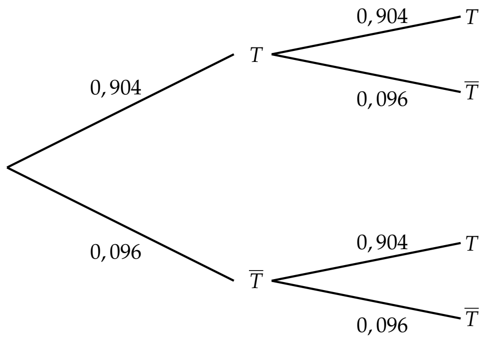
Da Nowitzki schon 50 Mal gefoult wurde, bekommt er mit Sicherheit 50 Freiwürfe. Es muss nun noch berechnet werden, bei wie vielen dieser fünzig Freiwürfe Nowitzki noch voraussichtlich trifft, denn dies ist die Anzahl der Freiwürfe, die er **dazu** noch bekommt. Beachte dabei, dass hier wieder die „alte“ Trefferquote von 90,4% angenommen wird:

$\mu = n \cdot p = 50 \cdot 0,904 = 45,2$

Wenn Nowitzki 50 Mal gefoult worden wäre, hätte er somit voraussichtlich $E(X) = 50 + 45,2 = 95,2$, also ca. 95 Freiwürfe ausführen dürfen.

e) ▶ **Beurteilung der Siegchancen der Dallas Mavericks** (10P)

Um den Sieg der Dallas Mavericks abschätzen zu können, muss zunächst berechnet werden, mit welcher Wahrscheinlichkeit Nowitzki bei den 2 Würfen einmal bzw. zweimal trifft. Dazu hilft das nebenstehende Baumdiagramm, indem T „Treffer“ sowie $\overline{T}$ „kein Treffer“ bezeichnet.



Nach der ersten Pfadregel trifft Nowitzki zwei Mal mit der Wahrscheinlichkeit:

$$P(\text{„2 Treffer“}) = P(T) \cdot P(T) = 0,904 \cdot 0,904 \approx 0,817$$

Die Wahrscheinlichkeit für genau einen Treffer setzt sich aus den Pfaden $T\overline{T}$ bzw. $\overline{T}T$ zusammen:

$$\begin{aligned} P(\text{„1 Treffer“}) &= P(T\overline{T}) + P(\overline{T}T) \\ &= 0,904 \cdot 0,096 + 0,096 \cdot 0,904 \\ &= 2 \cdot 0,904 \cdot 0,096 \approx 0,174 \end{aligned}$$

Nun muss untersucht werden, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Mavericks bei den erzielten Treffern von Nowitzki gewinnen.

Wenn Nowitzki zwei Mal getroffen hat, sind die Mavericks nun 1 Punkt im Vorsprung und gewinnen in dieser Situation sofort. Es ist damit:

$$P(\text{„Mavericks siegen bei 2 Treffern“}) = P(\text{„1 Treffer“}) \cdot 1 = 0,904^2 \cdot 1 \approx 0,817$$

Wenn Nowitzki nur einmal getroffen hat, steht es unentschieden im Spiel. Die Mavericks gewinnen in dieser Situation nur noch mit 50%iger Wahrscheinlichkeit, somit ist:

$$P(\text{„Mavericks siegen bei 1 Treffer“}) = P(\text{„1 Treffer“}) \cdot 0,5 = 2 \cdot 0,904 \cdot 0,096 \cdot 0,5 \approx 0,087$$

Um die allgemeinen Chancen für einen Sieg der Mavericks zu ermitteln, müssen diese beiden Fälle zusammen addiert werden, da die Mavericks **entweder** mit 1 Treffer von Nowitzki **oder** mit zwei Treffern gewinnen:

$$\begin{aligned} P(\text{Sieg}) &= P(\text{Sieg bei 1 Treffer}) + P(\text{Sieg bei 2 Treffern}) \\ &= 2 \cdot 0,904 \cdot 0,096 \cdot 0,5 + 0,904^2 \\ &= 0,904 = 90,4\% \end{aligned}$$

Die Mavericks siegen also mit genau derselben Wahrscheinlichkeit, wie Nowitzki einen Korb wirft!

Hinweis: Die Wahrscheinlichkeiten für einen Treffer von Nowitzki können ebenso mit der Binomialverteilung bestimmt werden. Dazu wird X als Anzahl der Treffer bei 2 Würfen gesehen, wobei diese Zufallsgröße $B_{2;0,904}$-verteilt ist. Wie oben ergibt sich damit $P(X=2) = 0,904^2$ und $P(X=1) = 2 \cdot 0,904 \cdot 0,096$.

▶ **Verallgemeinerung des Ergebnisses auf einen beliebigen Spieler**

Um das Ergebnis für einen Sieg auf einen beliebigen Spieler zu verallgemeinern, wird die Trefferwahrscheinlichkeit $0,904$ von Nowitzki allgemein durch p und der Wert $0,096 = 1 - 0,904$ allgemein durch $1-p$ ersetzt. Einsetzen in die obige Wahrscheinlichkeit für einen Sieg ergibt:

$$\begin{aligned} P(\text{Sieg}) &= 2 \cdot p \cdot (1-p) \cdot 0,5 + p^2 \\ &= p - p^2 + p^2 \\ &= p \end{aligned}$$

Die Mannschaft gewinnt somit genau mit der Wahrscheinlichkeit, mit der der Freiwurfschütze einen Korb wirft!