a) (1) ▶ **Punktsymmetrie zum Ursprung nachweisen**

Allgemein gilt für eine Symmetrie zum Ursprung $f(x) = -f(-x)$. Folglich muss dies auch auf diese Funktion zutreffen, damit die Vorgabe erfüllt ist und die Funktion somit punktsymmetrisch zum Ursprung ist.

- Punktsymmetrie zum Ursprung: $f(x) = -f(-x)$

(2) ▶ **Hoch- und Tiefpunkte bestimmen**

Für Hoch- und die Tiefpunkte gilt die notwendige Bedingung $f'(x) = 0$. Außerdem muss für einen Hochpunkt $f''(x) < 0$ und für einen Tiefpunkt $f''(x) > 0$ gelten.

- notwendige Bedingung für Extrema $f'(x) = 0$
- Hochpunkt $f''(x) < 0$
- Tiefpunkt $f''(x) > 0$

b) (1) ▶ **Zeigen, dass F eine Stammfunktion von f ist**

Um zu beweisen, dass eine gegebene Funktion die Stammfunktion einer weiteren bereits gegebenen Funktion ist, kannst du die Stammfunktion, soweit keine anderen Voraussetzungen vorhanden, ableiten.
Es muss gelten $F'(x) = f(x)$.

Leite also die Funktion F mit $F(x) = -\dfrac{3}{2} \cdot \mathrm{e}^{-x^2}$ einmal ab.

(2) ▶ **Inhalt der Fläche bestimmen**

Zunächst musst du die Gerade OH aufstellen. Diese bestimmt sich über den Punkt H und den Ursprung $O(0 \mid 0)$.
Bestimme dann das Integral beider Kurven innerhalb der Grenzen O und H und subtrahiere das größere vom kleineren, um die eingeschlossene Fläche zu bestimmen.

Die allgemeine Geradengleichung lautet $g: y = m \cdot x + n$. Setze die Punkt O und H ein, um die Parameter m und n zu bestimmen.

- Stelle die Gerade OH auf
- allgemeine Geradengleichung: $g: y = m \cdot x + n$, n beschreibt den Schnittpunkt mit der y-Achse, m beschreibt die Steigung der Geraden
- Subtrahiere die Integrale von f und OH von einander, um die gesuchte Fläche zu bestimmen

c) (1) ▶ **Tangentengleichungen von t_A und t_B bestimmen**

Für eine allgemeine Tangente t lautet die Tangentengleichung $t(x) = f'(x_0) \cdot x + n$.

Gegeben sind die Punkte A und B mit $A(1 \mid f(1))$, an dem die Tangente t_A anliegen soll, und $B(-1 \mid f(-1))$, an dem die Tangente t_B anliegen soll.

Folglich gilt $x_{0A} = 1$ bzw. $x_{0B} = -1$. Setze dies in die allgemeine Tangentengleichung ein.

- $t(x) = f'(x_0) \cdot x + n$
- $f'(x) = (1 - 2 \cdot x^2) \cdot 3\mathrm{e}^{-x^2}$
- Setze die Koordinaten von A und B in t ein

(2) ▶ **Achsenschnittpunkte bestimmen**

Da die beiden Berührpunkte Spiegelpunkte zu einander sind, musst du nur jeweils einen Achsenschnittpunkt bestimmen und dann das Vorzeichen umdrehen, um auch für die andere Tangente die Achsenschnittpunkte zu erhalten.

Die y-Achsenschnittpunkte hast du bereits im vorherigen Aufgabenteil in Form von c bestimmt, das die y-Koordinaten des y-Achsenschnittpunktes beschreibt.

Für x-Achsenschnittpunkte gilt: $f(x) = 0$.

Für y-Achsenschnittpunkte gilt $f(0) = c$.

(3) ▶ **Geeignete Skizze erstellen**

Ein Skizze ist immer dann geeignet, wenn sie den Sachverhalt der Aufgabe passend darstellt oder klärt.

In diesem Fall ist es der Zusammenhang der Achsenschnittpunkte. Diese sollen ein Viereck bilden. Zeichne in ein Koordinatensystem die Achsenschnittpunkte ein und verbinde sie so, dass sich ein Viereck bildet.

(4) ▶ **Begründen, dass eine Raute vorliegt**

Eine Raute liegt vor, wenn alle vier Seiten gleich lang sind. Die Länge einer Strecke kannst du berechnen über $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

- Berechne die Länge der Seiten über $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

(5) ▶ **Flächeninhalt des Vierecks bestimmen**

Den Flächeninhalt einer Raute kannst du bestimmen, indem du sie in zwei zueinander kongruente, gleichseitige Dreiecke aufteilst, deren Flächeninhalt über $A = \frac{1}{2} \cdot |\overline{OA_y}| \cdot |\overline{A_xB_x}|$ bestimmen kannst.

Folglich hat die Raute den Flächeninhalt $A_R = 2 \cdot A$.

Aufgrund der Symmetrie im Ursprung gilt für $|\overline{A_x B_x}| = 2 \cdot x_A$.

- Teile die Raute in 2 Dreiecke mit dem Flächeninhalt A
- $A = \frac{1}{2} \cdot \overline{OA_y} \cdot \overline{A_x B_x}$
- $|\overline{A_x B_x}| = 2 \cdot x_A$

d) (1) ▶ **Geeignete Skizze erstellen**

Um eine geeignete Skizze zu erstellen musst du dir zunächst eine Funktion definieren, die geforderten Eigenschaften besitzt.

Sie soll den Ursprung schneiden, zweimal differenzierbar sein und für $x > 0$ soll gelten $h(x) > 0$.

Betrachtest du die Funktion f, so siehst, du dass diese Eigenschaften genau auf sie zutreffen.

Um das Dreieck OQ_uP_u zu zeichnen, musst du dann noch einen Wert für u definieren und somit konkrete Werte der Punkte berechnen.

- Verwende f zum skizzieren der Gegebenheiten
- definiere einen Wert für u und berechne die Koordinaten der Punkte
- Spanne das Dreieck OQ_uP_u anhand der konkreten Werte auf

(2) ▶ **Flächeninhalt begründen**

Der Flächeninhalt eines Dreiecks berechnet sich allgemein über $A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h$.

Die Strecke $\overline{OQ_u}$ bildet hier die Grundseite a, während die Strecke $\overline{Q_uP_u}$ die Höhe h darstellt, da sich aufgrund der gleichen x-Koordinaten von P_u und Q_u ein rechter Winkel des Dreiecks am Punkt Q_u bildet.

Setze diese Bedingungen in die allgemeine Formel zur Berechnung des Flächeninhalts ein.

- Rechter Winkel an Q_u, da $u = u$ und somit $\overline{OQ_u} \perp \overline{Q_uP_u}$
- $a = \overline{OQ_u}$
- $h = \overline{Q_uP_u}$

(3) ▶ **Term der Extremstelle beweisen**

Für eine Extremstelle lautet die notwendige Bedingung, dass $A'(u) = 0$.

Folglich musst du zunächst $A(u)$ ableiten und im Anschluss $u = u_E$ setzen, um die Aussage zu prüfen.

Löse dann die Gleichung nach $h'(u_E)$ auf.

- notwendige Bedingung der Extremstelle: $A'(u) = 0$
- A_u ableiten und $u = u_E$ setzen
- Gleichung $A'(u) = 0$ nach $h'(u_E)$ auflösen

▶ Gleichung des lokalen Maximums beweisen

Die Bedingung für ein lokales Maximum lautet $A''(u) < 0$.
Folglich musst du zunächst die 2. Ableitung bestimmen, diesen vereinfachen und dann $A''(u_E) < 0$ setzen.

- A' ein weiteres Mal ableiten
- Term der 2. Ableitung vereinfachen
- Setze $A''(u_E) < 0$

(4) **▶ a bestimmen, das größten Flächeninhalt bedingt**

Die Aufgabenstellung weist dich bereits daraufhin, dass du die Bedingungen aus d) (3) verwenden sollst, um a zu bestimmen.
Ersetze folglich $h(u_E) = f(a)$ und $u_E = a$.
Somit benötigst du nur noch die Ableitungsfunktion von f.

- Leite f zweimal ab
- Setze $h(u_E) = f(a)$ und $u_E = a$
- Untersuche, ob die Gleichungen für a eine wahre Aussage ergeben