Teil 1

1. Skizzieren Sie den Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $f\colon x \mapsto 4 - x^2$. (5BE)

   Berechnen Sie den Inhalt des Flächenstücks, das der Graph von f mit der x-Achse einschließt.

2. Geben Sie die maximale Definitionsmenge der Funktion $f\colon x \mapsto 3\sqrt{x}$ an und bestimmen Sie den Term derjenigen Stammfunktion von f, deren Graph den Punkt $(1\,|\,4)$ enthält. (4BE)

3. Betrachtet wird die Funktion $f\colon x \mapsto \dfrac{\sin x}{x^2}$ mit Definitionsmenge $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

   a) Geben Sie die Nullstellen von f an. (3BE)

   b) Ermitteln Sie das Symmetrieverhalten des Graphen von f und geben Sie den Grenzwert von f für $x \to +\infty$ an. (3BE)

   c) Bestimmen Sie den Term der Ableitung von f. (2BE)

4. Geben Sie den Term einer gebrochen-rationalen Funktion f mit Definitionsmenge $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ an, deren Graph die Gerade mit der Gleichung $y = 2$ als Asymptote besitzt und in $x = -1$ eine Polstelle ohne Vorzeichenwechsel hat. (3BE)

(20BE)

Teil 2

1. Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f\colon x \mapsto 6 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}5x} + x$. Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet.

   a) Untersuchen Sie das Monotonie- und das Krümmungsverhalten von G_f. (10BE)

   Bestimmen Sie Lage und Art des Extrempunkts $E(x_E\,|\,y_E)$ von G_f.

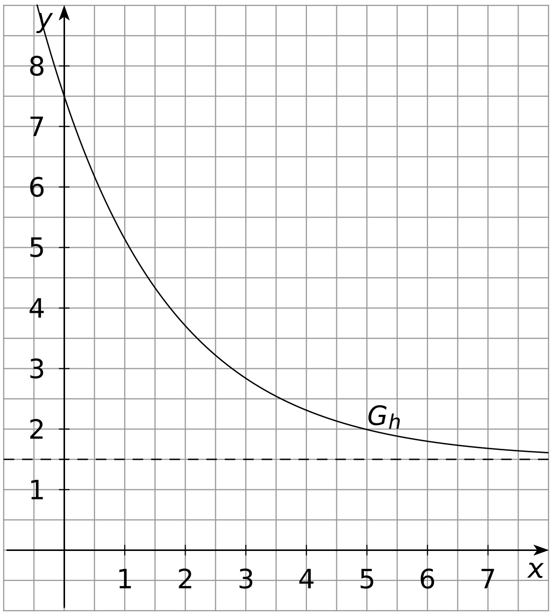
   (zur Kontrolle: $x_E = 2 \cdot \ln 3$; $f''(x) = 1{,}5 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}5x}$)

   b) Geben Sie das Verhalten von f für $x \to -\infty$ an. Machen Sie plausibel, dass G_f für $x \to +\infty$ die Gerade mit der Gleichung $y = x$ als schräge Asymptote besitzt. (3BE)

   c) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an G_f im Punkt $(0\,|\,6)$. (6BE)

   Skizzieren Sie G_f unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse in ein geeignet anzulegendes Koordinatensystem.

2. Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $h\colon x \mapsto 6\cdot e^{-0,5x}+1,5$. Die Abbildung zeigt den in $\mathbb{R}$ streng monoton fallenden Graphen G_h von h sowie dessen Asymptote, die durch die Gleichung $y = 1,5$ gegeben ist.



a) Beschreiben Sie, wie G_h aus dem Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten natürlichen Exponentialfunktion $x \mapsto e^x$ hervorgeht. (4BE)

Für $x \geq 0$ beschreibt die Funktion h modellhaft die zeitliche Entwicklung des momentanen Schadstoffausstoßes einer Maschine. Dabei ist x die seit dem Start der Maschine vergangene Zeit in Minuten und $h(x)$ die momentane Schadstoffausstoßrate in Milligramm pro Minute.

b) Geben Sie in diesem Sachzusammenhang die Bedeutung des Monotonieverhaltens von G_h sowie des Grenzwerts von h für $x \to +\infty$ an. (3BE)

c) Bestimmen Sie den Inhalt des Flächenstücks, das G_h, die Koordinatenachsen und die Gerade mit der Gleichung $x = 5$ einschließen. Interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang. (6BE)

3. Gegeben ist die Schar der Funktionen $f_a\colon x \mapsto 6\cdot e^{-0,5x} - a\cdot x$ mit $a \in \mathbb{R}^+$ und der Definitionsmenge $\mathbb{R}$.

a) Weisen Sie nach, dass die Graphen aller Funktionen der Schar die y-Achse im selben Punkt schneiden und in $\mathbb{R}$ streng monoton fallend sind. (5BE)

Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{x\to+\infty} f_a(x) = -\infty$ gilt.

b) Aus den Ergebnissen der Aufgabe 3a ergibt sich, dass jede Funktion der Schar genau eine Nullstelle besitzt. Bestimmen Sie für diese Nullstelle in Abhängigkeit von a einen Näherungswert x_1, indem Sie den ersten Schritt des Newton-Verfahrens mit dem Startwert $x_0 = 0$ durchführen. (3BE)

(40BE)