1.1 **► Nachweis, dass es sich um eine Pyramide mit quadratischer Grundfläche handelt** (7P)

Wenn $ABCD$ eine quadratische Grundfläche bilden soll, so müssen die Eigenschaften eines Quadrats für das Viereck nachgewiesen werden.
In einem Quadrat

1. sind die gegenüberliegenden Seiten jeweils parallel und gleich lang und
2. die aneckenden Seiten stehen senkrecht aufeinander.

Zwei gegenüberliegende Seiten sind dann parallel und gleich lang, wenn die Vektoren durch diese Seiten gleich lang und Vielfache voneinander sind.
Aneckende Seiten stehen dann senkrecht aufeinander, wenn das Skalarprodukt der Vektoren durch diese Seiten gleich Null ist.

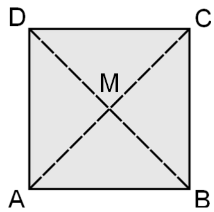
Sind diese beiden Bedingungen nachgewiesen, muss noch geprüft werden, ob mit der Spitze S tatsächlich eine Pyramide vorliegt. Dies ist nur dann der Fall, wenn

3. S nicht in der Ebene E der Grundfläche liegt.

Sind diese drei Kriterien erfüllt, handelt es sich um eine Pyramide mit der Grundfläche $ABCD$.

1.2 **► Nachweis der Orthogonalität von MS zur Ebene der Grundfläche.** (4P)

Wir haben bereits gezeigt, dass das Viereck $ABCD$, das die Grundfläche der Pyramide darstellt, ein Quadrat ist. In einem Quadrat schneiden sich die Diagonalen in der Mitte des Quadrats so, dass der Schnittpunkz M die Diagonalen in zwei gleich lange Strecken teilt.
Von oben betrachtet sieht das etwa so aus:



Nun soll die Gerade durch MS senkrecht auf die Ebene der Grundfläche stehen. Dies ist dann erreicht, wenn der Richtungsvektor der Geraden $\overrightarrow{MS}$ senkrecht auf die Spannvektoren der Ebene E steht, wenn also

$\overrightarrow{MS} \perp \overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{MS} \perp \overrightarrow{BC}$

gilt.
Zwei Vektoren stehen immer dann orthogonal zueinander, wenn ihr Skalarprodukt Null ist.
Es muss also nachgewiesen werden, dass

$\overrightarrow{MS} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ und $\overrightarrow{MS} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$

stimmt.
Wir kommen somit in zwei Schritten zum Ziel:

1. Schnittpunkt M der Diagonalen bestimmen.
2. Nachweisen, dass das Skalarprodukt der Spannvektoren von E mit $\overrightarrow{MS}$ Null ist.

► Volumen der Pyramide

Das Volumen einer Pyramide berechnet sich allgemein über die Formel:

$V = \frac{1}{3} \cdot \text{Grundfläche} \cdot \text{Höhe}.$

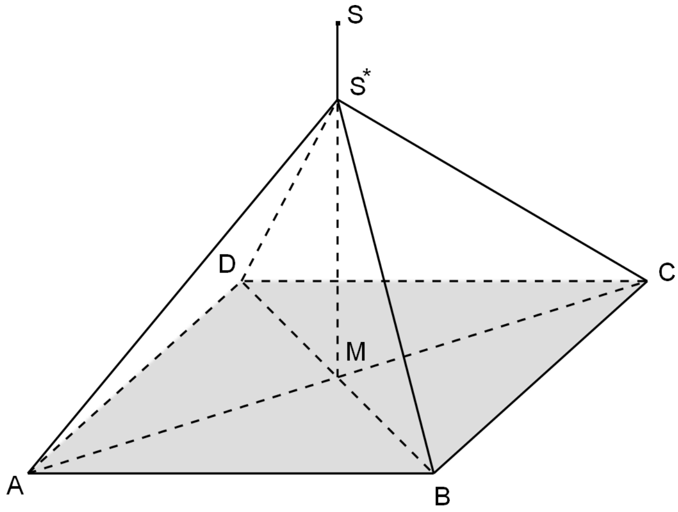
Die Grundfläche G ist unserem Fall das Quadrat $ABCD$, sein Flächeninhalt ist das Quadrat der Länge einer seiner Seitenkanten.

Die Höhe der Pyramide entspricht dem Abstand der Spitze S zum Lotfußpunkt M, da die Gerade durch diese Punkt erwiesenermaßen orthogonal auf die Ebene der Grundfläche steht.

1.3 **► Spitze S^* eine Pyramide mit gleichseitigen Dreiecken zur Seitenfläche** (4P)

S^* soll die Spitze einer Pyramide werden, deren Seitenflächen alle gleichseitige Dreiecke darstellen.

Die Seitenflächen einer Pyramide sind nur dann gleich, wenn es sich um eine gerade Pyramide handelt. Bei einer geraden Pyramide mit quadratischer Grundfläche muss der Lotfußpunkt Spitze S^* daher genau in der Mitte des Quadrats liegen.



nicht maßstabsgetreu

In unserem Fall ist die Mitte der Grundfläche M. Das Lot, das senkrecht auf die Grundfläche stehen muss, liegt auf der Geraden durch MS. Folglich muss S^* auf dieser Geraden liegen.

Damit die Seitenflächen nun auch gleichseitige Dreiecke darstellen, muss gegeben sein, dass alle alle Seiten dieser Flächen gleich lang sind. Da bei einer geraden Pyramide alle Seitenkanten gleich lang sind, muss S^* so bestimmt werden, dass eine Seitenkante genauso lang ist wie eine Seite der Grundfläche.

S^* muss also

1. auf der Geraden durch MS liegen und
2. so gewählt werden, dass eine Seitenkante genauso lang ist, wie eine Grundflächenseite.