a) **► Graphzuordnung begründen** (15P)

Du sollst begründen, dass Graph II aus der gegebenen Abbildung zur Funktion f gehört. Berechne dazu beispielsweise die Koordinaten eines Punktes P, der zwar auf dem Graphen von f, aber nicht auf dem Graphen von g liegt. Anschließend siehst du anhand der Abbildung, dass dieser Punkt auch auf Graph II liegt.

Einen solchen Punkt findest du, indem du anhand der Abbildung einen Wert von x abliest, für den sich die beiden Graphen nicht schneiden und diesen anschließend in $f(x)$ einsetzt.

► Symmetrieverhalten von f untersuchen

Du sollst das Symmetrieverhalten von f untersuchen. Dir sind zwei mögliche Symmetrien von Graphen bekannt:

- **Punktsymmetrie zum Ursprung**: Der Graph einer Funktion f ist punktsymmetrisch zum Ursprung, wenn für alle x im Definitionsbereich gilt: $f(-x) = -f(x)$.
- **Achsensymmetrie zur y-Achse**: Der Graph einer Funktion f ist achsensymmetrisch zur y-Achse, wenn für alle x im Definitionsbereich gilt: $f(-x) = f(x)$.

Überprüfe diese beiden Symmetrieverhalten nun für f. Anhand der Abbildung der beiden Graphen kannst du bereits sehen, dass der Graph von f am ehesten punktsymmetrisch zum Ursprung ist. Überprüfe also zuerst die Punktsymmetrie.

► Bedingungen für eine Tangente in einem Punkt an einen Graphen angeben

Du sollst die allgemeinen Bedingungen für eine Tangente in einem Punkt P an einen Graphen von f angeben.

Eine Tangente an einen Graphen von f in einem Punkt P ist eine Gerade, die den Graphen in diesem vorgegebenen Punkt P berührt, ihn dort aber nicht schneidet. Sie hat die gleiche Steigung wie f in diesem Punkt.

► Nachweisen, dass die Graphen von f und g im Ursprung die gleiche Tangente haben

Du sollst nun nachweisen, dass die Graphen von f und g im Ursprung die gleiche Tangente haben. Die Geradengleichung der Tangente im Ursprung an den Graphen von f ist dir in der Aufgabe mit $y = x$ vorgegeben. Du musst nun noch die oben genannten Bedingungen für eine Tangente an den Graphen von g im Ursprung überprüfen.

Da die Tangente durch den Ursprung verläuft, muss für g gelten: $g(0) = 0$.

Zudem müssen die Tangente und der Graph von g die gleiche Steigung im Ursprung haben. Berechne also die Steigung der Tangenten, sowie die Steigung des Graphen von g im Ursprung. Die Steigung des Graphen einer Funktion f wird durch die erste Ableitung f' beschrieben.

► Stellen ermitteln, an denen sich die y-Werte von f und g um den Wert 2 unterscheiden

Du sollst die Stellen berechnen, für die sich die y-Werte von f und g um den Wert 2 unterscheiden. Du suchst also die x-Werte für die eine der folgenden Gleichungen erfüllt ist:

I $f(x) - g(x) = 2$

II $f(x) - g(x) = -2$

Bestimme also die Lösungen der beiden Gleichungen I und II. Dies kannst du mit dem GTR tun, indem du $f - g$ als neue Funktion h auffasst und die Schnittstellen von h mit der Konstanten $y = 2$ bzw. $y = -2$ berechnest.

b) **► Zeigen, dass der Graph von f genau zwei Extrempunkte besitzt** (14P)

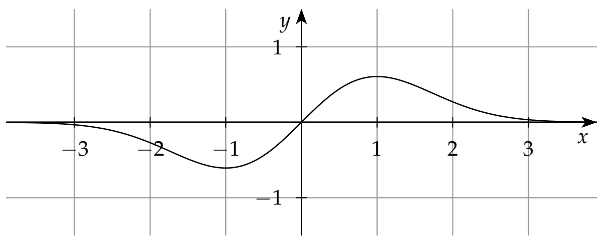
Du sollst nun zeigen, dass der Graph von f genau zwei Extrempunkte besitzt. Für eine Extremstelle x_E gibt es zwei Kriterien:

- **Das notwendige Kriterium:** Die erste Ableitung f' der Funktion f muss an einer möglichen Extremstelle eine Nullstelle haben. Es muss gelten: $f'(x_E) = 0$. Setze demnach $f'(x) = 0$ und löse nach x auf, um mögliche Extremstellen zu berechnen.
- **Das hinreichende Kriterium:** Um die möglichen Extremstellen x_E nun daraufhin zu untersuchen, ob diese auch tatsächlich Extremstellen sind, gibt es zwei Möglichkeiten:
  - **Das Vorzeichen-Wechsel-Kriterium:** In einer Maximalstelle liegt immer ein Vorzeichen-Wechsel von $+$ nach $-$ in der ersten Ableitung vor. Für eine Minimalstelle gilt genau das Gegenteil.
  - **GTR:** Die zweite Ableitung f'' von f darf in einer Extremstelle nicht Null sein. Es muss also gelten $f''(x_E) \neq 0$. Berechne also die Funktionswerte der zweiten Ableitung in den möglichen Extremstellen mit dem GTR.

► Zeigen, dass der Graph von f genau drei Wendepunkte besitzt

Du sollst nun begründen, dass der Graph von f genau drei Wendepunkte besitzt. Dies kannst du argumentativ tun. Du brauchst hier nicht zu rechnen.

Du weißt, dass der Graph von f genau zwei Extrempunkte besitzt. Zudem nähert sich der Graph für betragsmäßig sehr große x-Werte der x-Achse an. Ein Wendepunkt, ist ein Punkt, an dem der Graph einer Funktion sein Krümmungsverhalten ändert.



Stellst du dir einmal vor, der Graph von f würde eine Straße beschreiben, auf der du mit dem Fahrrad entlang fährst, dann ist ein Wendepunkt ein Punkt, an dem du von einer Linkskurve in eine Rechtskurve wechselst, oder umgekehrt. Zwischen zwei Kurven muss auch immer solch ein Punkt liegen.

Fährst du den Graphen von f von „links nach rechts" entlang, so fährst du zuerst eine Rechtskurve. Anschließend folgt im Tiefpunkt eine Linkskurve. Zwischen diesen beiden Stellen befindet sich **der erste Wendepunkt**.

Anschließend folgt eine Rechtskurve im Hochpunkt des Graphen. Davor befindet sich **der zweite Wendepunkt**.

Nun nähert sich der Graph wieder der x-Achse an. Hier folgt nun eine Linkskurve und damit auch hiervor **der dritte Wendepunkt**.

Insgesamt muss der Graph von f also genau drei Wendepunkte besitzen.

▶ Stellen von f mit Tangentensteigung $-\frac{1}{4}$ bestimmen

Du sollst die Stellen von f bestimmen, für die die Tangenten an den Graphen von f die Steigung $-\frac{1}{4}$ besitzen. Wie du aus Aufgabenteil a) bereits weißt, besitzen Tangenten an den Graphen einer Funktion f in einem Punkt P dieselbe Steigung wie der Graph im Punkt P. Das bedeutet, du suchst nun die Stellen von f in denen der Graph von f die Steigung $m = -\frac{1}{4}$ besitzt. Zudem weißt du, dass die Steigung des Graphen von f durch die erste Ableitung f' beschrieben wird. Du suchst also die Stellen von f für die gilt $f'(x) = -\frac{1}{4}$. Dies sind die Schnittpunkte des Graphen von f' mit der Geraden $y = -\frac{1}{4}$

c) **▶ Höhenzuwachs im ersten Monat berechnen** (15P)

Du sollst berechnen, wie viele cm die Pflanze im ersten Monat gewachsen ist.

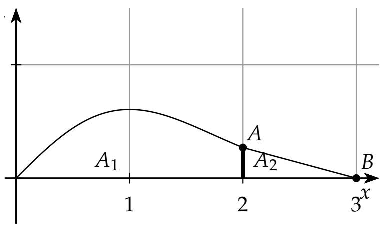
Die Funktion f beschreibt, wie viel Höhe die Pflanze zu jedem Zeitpunkt gewinnt. Der gesamte Höhenzuwachs ist die Summe von allen Zeitpunkten des Wachstums. Du müsstest also alle y-Werte bis zum gesuchten Zeitpunkt addieren. Diese Summe der y-Werte entspricht zugleich dem Flächeninhalt zwischen dem Graphen von f und der x-Achse bis zum gegebenen x-Wert.

Den Flächeninhalt zwischen dem Graphen von f und der x-Achse berechnest du hier über ein Integral.

Gesucht ist hier das Integral über f in den Grenzen $a = 0$ und $b = 1$, da du die gesamte Höhe berechnen möchtest, die die Pflanze seit dem Beginn der Beobachtung bis einen Monat danach gewonnen hat.

▶ Höhe der Pflanze nach drei Monaten berechnen

Du sollst die Höhe der Pflanze nach drei Monaten berechnen, wenn sie zu Beginn der Beobachtung 2 cm hoch war. Du weißt bereits, dass der Höhenzuwachs der Pflanze bis zum Zeitpunkt t dem Inhalt der Fläche unter dem Graphen von f entspricht.



Da der Graph von f allerdings das Wachstum der Pflanze nur in den ersten zwei Monaten beschreibt und ihr Wachstum dann linear abnimmt, entspricht die Höhe der Pflanze nach drei Monaten dem Inhalt der Fläche, die von dem Graphen von f, der Geraden durch A und B und der x-Achse eingeschlossen wird, addiert zu den 2 cm, der Anfangshöhe.

Die Fläche kannst du in zwei Teilflächen aufteilen, um ihren Inhalt zu berechnen:

- A_1: Der Inhalt der Fläche unter dem Graphen von f vom Zeitpunkt $x_1 = 0$ bis $x_2 = 2$ ist der Höhenzuwachs der Pflanze nach zwei Monaten.
- A_2: Der Flächeninhalt des Dreiecks unter der Geraden vom Zeitpunkt $x_2 = 2$ bis zum Ende der drei Monate $x_3 = 3$. Die Gerade beginnt bei $x_2 = 2$. Der obere Punkt A hat also die Koordinaten $A(2 \mid f(2))$. Der Punkt B liegt an der Nullstelle der Geraden und hat die Koordinaten $B(3 \mid 0)$.

Damit ergibt sich dann für die Höhe h_P der Pflanze nach 3 Monaten: $h_P = 0{,}02 + A_1 + A_2$.

▶ Zeigen, dass F eine Stammfunktion von f ist

Du sollst zeigen, dass die Funktion F mit $F(x) = c - \mathrm{e}^{-0{,}5\cdot x^2}$ eine Stammfunktion von f ist. F ist eine Stammfunktion von f, wenn f die erste Ableitung von F ist. Für eine Stammfunktion F der Funktion f muss also gelten : $F'(x) = f(x)$.

Du kannst also zeigen, dass F eine Stammfunktion von f ist, indem du F ableitest. Bei F handelt es sich um eine **verkettete Funktion**. Leite daher nach der **Kettenregel** ab.

▶ Vorgehen bei der Berechnung des Höhenzuwachses beschreiben

Du sollst beschreiben, wie sich mit Hilfe der Funktion F der Höhenzuwachs der Pflanze zwischen zwei Zeitpunkten t_1 und t_2 im Intervall $[0; 2]$ berechnen lässt.

Du weißt bereits, dass sich der Höhenzuwachs der Pflanze zwischen zwei Zeitpunkten t_1 und t_2 über das Integral berechnen lässt: $h_P = \int_{t_1}^{t_2} f(x)\mathrm{d}x$.

Zuvor hast du das Integral mit dem GTR berechnet. Mit Hilfe einer Stammfunktion F von f kannst du dieses Integral aber auch handschriftlich über den Hauptsatz der Integralrechnung berechnen.