Die südliche Uferlinie eines Flusses werde in einem Koordinatensystem durch den Graphen der Funktion f mit $f(x) = 0,05 \cdot x^3 - 0,6 \cdot x^2 + 1,35 \cdot x; \quad x \in [0;\ 10]$ beschrieben. Dabei zeigt die x-Achse nach Osten und die y-Achse nach Norden. Eine Einheit entspricht 10 m in der Wirklichkeit.

Die nördliche Uferlinie werde durch den Graphen der Funktion g mit $g(x) = \mathrm{e}^{x-8} + 2;\ x \in [0;\ 10]$ beschrieben.

Runden Sie im Folgenden alle Werte auf zwei Stellen nach dem Komma.

a)

- Berechnen Sie die Nullstellen, Extrempunkte und Wendepunkte des Graphen der Funktion f im gegebenen Intervall.
- Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f auf das beigefügte Blatt, auf dem der Graph der Funktion g bereits dargestellt ist.

(12P)

b)

Im Norden des Flusses ist ein Überlaufgebiet geplant. Das Überlaufgebiet wird begrenzt durch den Graphen einer Funktion h mit $h(x) = \mathrm{e}^{ax} + b; \quad x \in [0;\ 10];\ a, b \in \mathbb{R}$.

- Bestimmen Sie die Parameter a und b so, dass das Überlaufgebiet an den Stellen $x_0 = 0$ und $x_1 = 10$ mit dem Nordufer des Flusses zusammentrifft.

Verwenden Sie im Folgenden $h(x) = \mathrm{e}^{0,21x} + 1$.

- Berechnen Sie die größte Ausdehnung des Überlaufgebiets in Nord-Süd-Richtung.

(9P)

c)

Von der Wasseroberfläche des Flusses im Intervall $[3;\ 9]$ sind zu einem bestimmten Zeitpunkt 150 m² von Algen bedeckt.
Die in diesem Intervall bedeckte Wasserfläche vergrößert sich wöchentlich um 30 %.

Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem 80 % der Wasseroberfläche im Intervall $[3;\ 9]$ von Algen bedeckt ist.

(6P)

d)

Eine weitere Funktion i ist definiert durch $i(x) = \mathrm{e}^{x-8} - x + 2$.

Zeigen Sie, dass es keine Stelle $x \in \mathbb{R}$ gibt, an der die Tangenten an die Graphen von g und i orthogonal zueinander sind.

(3P)

Beiblatt: