a) **► Funktionsgleichung von g bestimmen** (3P)

Der Graph von g ist eine **Parabel**, folglich ist g eine ganzrationale Funktion zweiten Grades. Du hast verschiedene Möglichkeiten, eine Funktionsgleichung zu bestimmen.

- Ansatz $g(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$ (Produkt aus Linearfaktoren)
- Ansatz $g(x) = a \cdot (x - x_S)^2 + y_S$ (Scheitelpunktform)
- Ansatz $g(x) = ax^2 + bx + c$ (Normalform)

Im Folgenden führen wir die Lösung mit jedem der Ansätze durch.

►► Lösungsweg A: Produkt aus Linearfaktoren

Eine ganzrationale Funktion g zweiten Grades besitzt allgemein die Funktionsgleichung $g(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$, wobei x_1 und x_2 die **Nullstellen** von g sind. Der Abbildung kannst du entnehmen, dass der Graph von g die x-Achse bei $x_1 = 1$ und $x_2 = 3$ schneidet. Also sind dies die Nullstellen von g:

$g(x) = a \cdot (x - 1) \cdot (x - 3)$.

Wähle nun einen weiteren Punkt, der auf dem Graphen von g liegt und setze dessen Koordinaten in die Funktionsgleichung ein, um einen Wert für a zu bestimmen. Wir wählen den Punkt $(0 \mid 1{,}5)$.

$$\begin{aligned} 1{,}5 &= a \cdot (0-1) \cdot (0-3) \\ 1{,}5 &= a \cdot 3 && \mid :3 \\ 0{,}5 &= a \end{aligned}$$

Damit folgt die Funktionsgleichung $g(x) = 0{,}5 \cdot (x - 1) \cdot (x - 3)$. Ausmultiplizieren ergibt:

$$\begin{aligned} g(x) &= 0{,}5 \cdot \left(x^2 - x - 3x + 3\right) \\ &= 0{,}5 \cdot \left(x^2 - 4x + 3\right) \\ &= 0{,}5x^2 - 2x + 1{,}5 \\ g(x) &= \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{3}{2} \end{aligned}$$

►► Lösungsweg B: Scheitelpunktform

Eine ganzrationale Funktion g zweiten Grades besitzt allgemein die Funktionsgleichung $g(x) = a \cdot (x - x_S)^2 + y_S$, wobei $(x_S \mid y_S)$ die Koordinaten des Scheitelpunkts der Parabel sind. Aus der Abbildung folgt der Scheitelpunkt $S\,(2 \mid -0{,}5)$ und somit $x_S = 2$ und $y_S = -0{,}5$:

$g(x) = a \cdot (x - 2)^2 - 0{,}5$.

Wähle nun einen weiteren Punkt, der auf dem Graphen von g liegt und setze dessen Koordinaten in die Funktionsgleichung ein, um einen Wert für a zu bestimmen. Wir wählen den Punkt $(0 \mid 1{,}5)$.

$$\begin{aligned} 1{,}5 &= a \cdot (0-2)^2 - 0{,}5 && \mid +0{,}5 \\ 2 &= a \cdot 4 && \mid :4 \\ 0{,}5 &= a \end{aligned}$$

Damit folgt die Funktionsgleichung $g(x) = 0{,}5 \cdot (x - 2)^2 - 0{,}5$. Ausmultiplizieren ergibt:

$$\begin{aligned} g(x) &= 0{,}5 \cdot \left(x^2 - 4x + 4\right) - 0{,}5 \\ &= 0{,}5x^2 - 2x + 2 - 0{,}5 \\ &= 0{,}5x^2 - 2x + 1{,}5 \\ g(x) &= \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{3}{2} \end{aligned}$$

▶▶ Lösungsweg C: Normalform

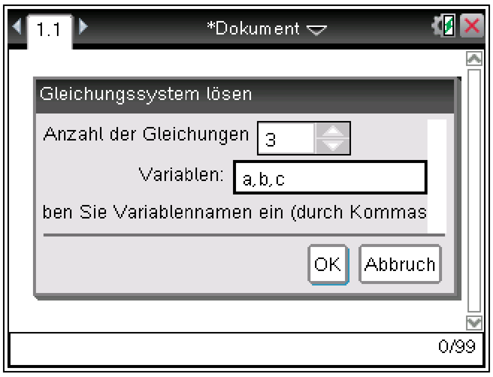
Eine ganzrationale Funktion g zweiten Grades besitzt allgemein die Funktionsgleichung $g(x) = ax^2 + bx + c$. Der Funktionsterm enthält drei Unbekannte. Du benötigst also die Koordinaten **dreier** Punkte, die auf dem Graphen von g liegen. Anschließend kannst du diese Punkte in die Funktionsgleichung von g einsetzen und erhältst ein lineares Gleichungssystem.
Wir wählen die Punkte

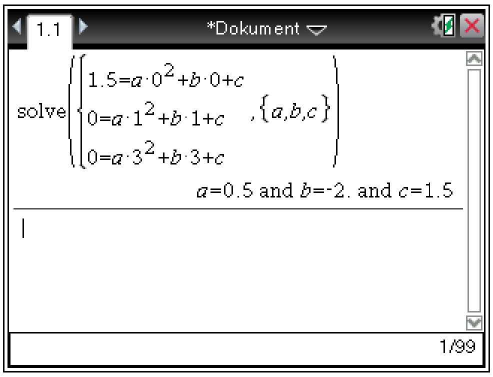
$P_1(0 \mid 1{,}5)$, $\quad P_2(1 \mid 0)$, $\quad$ und $\quad P_3(3 \mid 0)$.

Aus diesen Punkten erhältst du ein lineares Gleichungssystem mit drei Gleichungen:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & g(0) = 1{,}5 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \\ \text{II} & g(1) = 0 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c \\ \text{III} & g(3) = 0 = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c \end{array}$$

Wechsle ins `Calculator`-Menü deines CAS. Den Befehl für „Gleichungssystem lösen" findest du unter $\boxed{\texttt{menu} \rightarrow 3 \rightarrow 7 \rightarrow 1}$. Gib hier die Anzahl der Gleichungen (3) und die Variablen (a, b und c) ein und bestätige mit `Enter`. Gib anschließend die drei Gleichungen ein und bestätige erneut mit `Enter`. Das CAS liefert dir dann die Lösungen für die drei Variablen:





Das CAS liefert die Lösungen $a = 0{,}5$, $b = -2$ und $c = 1{,}5$.

Damit folgt die Funktionsgleichung

$g(x) = 0{,}5x^2 - 2x + 1{,}5 \quad$ bzw. $\quad g(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - 2x + \dfrac{3}{2}$

b) **▶ Gemeinsamen Punkt nachweisen** (4P)

Der Punkt $S_x(1 \mid 0)$ ist ein gemeinsamer Punkt der Graphen von f und g, wenn er die Funktionsgleichung **beider** Funktionen erfüllt. Führe also eine Punktprobe durch.

$$\begin{aligned} S_x \text{ in } f(x): \quad f(1) = 0 &= -1^3 + 4 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 \\ 0 &= -1 + 4 - 3 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Wahre Aussage, d.h. S_x liegt auf dem Graphen von f.

S_x in $g(x)$: $\quad g(1) = 0 = \frac{1}{2} \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 + \frac{3}{2}$

$$0 = \frac{1}{2} - 2 + \frac{3}{2} \qquad \mid \ \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$0 = 2 - 2$$

$$0 = 0$$

Wahre Aussage, d.h. S_x liegt auf dem Graphen von g.

Damit ist S_x als gemeinsamer Punkt der Graphen nachgewiesen.

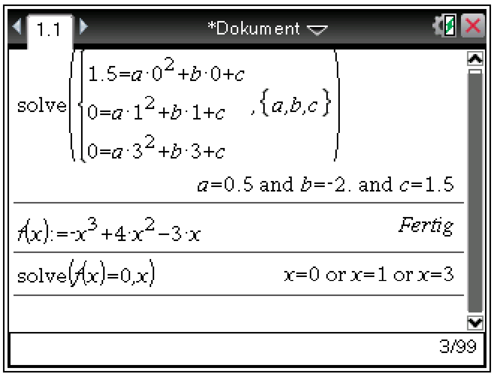
▶ **Weitere Schnittpunkte mit der x-Achse berechnen**

Gesucht sind die Punkte, in denen der Graph von f die x-Achse schneidet. Die x-Koordinate dieser Schnittpunkt mit der x-Achse heißen **Nullstellen**.

Setze $f(x) = 0$, um die Nullstellen der Funktion f zu ermitteln. Du kannst diese Gleichung mit deinem CAS lösen.

Definiere den Funktionsterm $f(x)$ der Funktion in deinem CAS. Löse dann die Gleichung $f(x) = 0$ mit dem `solve`-Befehl deines CAS.

Das CAS liefert die Lösungen $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ und $x_3 = 3$.



Es folgen damit die drei Schnittpunkte mit der x-Achse $S_x(1 \mid 0)$, $N_1\,(3 \mid 0)$ und $N_2\,(0 \mid 0)$.

c) ▶ **Koordinaten der lokalen Extrempunkte berechnen** (9P)

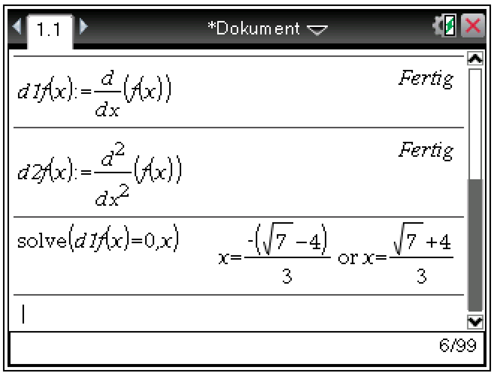
Du sollst die lokalen Extrempunkte des Graphen von f bestimmen. Dazu kannst du so vorgehen:

- Bestimme im ersten Schritt die ersten beiden Ableitungen f' und f'' mit deinem CAS.
- Notwendiges Kriterium: Setze $f'(x) = 0$ und löse die Gleichung auf. So erhältst du die potentiellen Extremstellen.
- Hinreichendes Kriterium: Setze die potentiellen Extremstellen in die zweite Ableitung f'' ein. Wenn sich ein positiver Wert ergibt, so liegt ein Minimum vor; wenn sich ein negativer Wert ergibt, dann liegt ein Maximum vor.
- Setze die Extremstellen zuletzt in die Funktionsgleichung von f ein und berechne so die zugehörigen y-Koordinaten.

1. Schritt: Ableitungen bilden und potentielle Extremstellen bestimmen

Den Befehl für „Ableiten“ findest du unter `menu → 4 → 1`. Bestimme die erste und die zweite Ableitung f' und f'' von f mit deinem CAS und speichere sie ab. Wir speichern sie als d1f und d2f.

Löse anschließend die Gleichung $f'(x) = 0$ mit dem `solve`-Befehl und erhalte so die potentiellen Extremstellen von f.

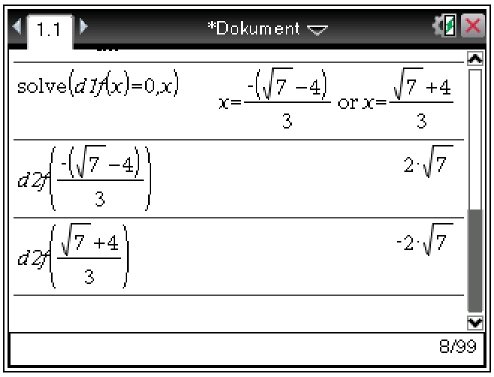


Das CAS liefert die potentiellen Extremstellen $x_1 = \frac{-(\sqrt{7}-4)}{3} \approx 0,45$ und $x_2 = \frac{\sqrt{7}+4}{3} \approx 2,22$.

2. Schritt: Hinreichendes Kriterium untersuchen und Art der Extrempunkte bestimmen

Setze die beiden Lösungen $x_1 = -\frac{\sqrt{7}-4}{3}$ und $x_2 = \frac{\sqrt{7}+4}{3}$ ein in $f''(x)$. Wenn sich ein positiver Wert ergibt, so liegt ein Minimum vor, wenn sich ein negativer Wert ergibt, so liegt ein Maximum vor.

An der Stelle $x_1 = -\frac{\sqrt{7}-4}{3}$ nimmt die zweite Ableitung mit $2\sqrt{7}$ einen positiven Wert an. Hier liegt ein Minimum vor.

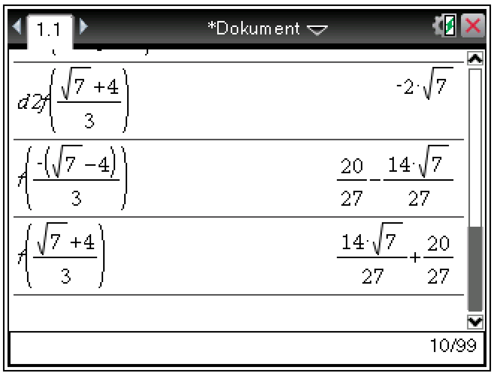


An der Stelle $x_2 = \frac{\sqrt{7}+4}{3}$ nimmt die zweite Ableitung mit $-2\sqrt{7}$ einen negativen Wert an. Hier liegt ein Maximum vor.

3. Schritt: y-Koordinaten der Extrempunkte berechnen

Setze die beiden Lösungen $x_1 = -\frac{\sqrt{7}-4}{3}$ und $x_2 = \frac{\sqrt{7}+4}{3}$ ein in $f(x)$ und ermittle so die zugehörigen y-Koordinaten.

Der lokale Tiefpunkt T hat die Koordinaten $T\left(-\frac{\sqrt{7}-4}{3} \mid \frac{20}{27} - \frac{14\sqrt{7}}{27}\right) \approx T\,(0,5 \mid -0,6)$.



Der lokale Hochpunkt H hat die Koordinaten $H\left(\frac{\sqrt{7}+4}{3} \mid \frac{14\sqrt{7}}{27} + \frac{20}{27}\right) \approx T\,(2,2 \mid 2,1)$.

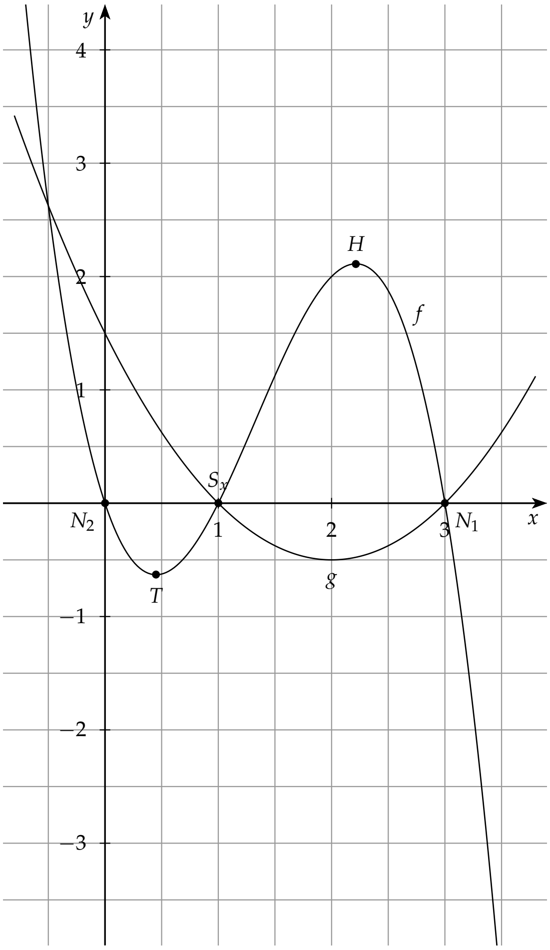
▶ **Graph von f in Anlage einzeichnen**

Bisher hast du bereits einige wichtige Punkte des Graphen von f berechnet oder gegeben, nämlich:

- die Schnittpunkte mit der x-Achse $S_x(1 \mid 0)$, $N_1\,(3 \mid 0)$, $N_2\,(0 \mid 0)$,
- den Hochpunkt $H(2,2 \mid 2,1)$ und den Tiefpunkt $T(0,5 \mid -0,6)$.

Zeichne diese Punkte ein. Du weißt, dass es sich bei f um eine Funktion dritten Grades handelt. Wenn du möchtest, kannst du auch eine Wertetabelle anfertigen und somit noch weitere Punkte des Graphen berechnen.

In der Anlage ist bereits der Graph von g dargestellt:



d) ▶ **Länge des Sees berechnen** (6P)

Der See entspricht der Fläche, welche von den Graphen von f und g für $1 \leq x \leq 3$ eingeschlossen wird. Der nördlichste Punkt des Sees ist gerade der Hochpunkt H des Graphen von f. Der südlichste Punkt ist der Scheitelpunkt S des Graphen von g. Seine Koordinaten $S\,(2 \mid -0{,}5)$ kannst du direkt aus der Abbildung ablesen.

Gesucht ist der **Abstand** dieser beiden Punkte. Für den Abstand d zweier Punkte $P(p_1 \mid p_2)$ und $Q(q_1 \mid q_2)$ gilt mit dem Satz des Pythagoras:

$d = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2}$.

Einsetzen von $H\,(2,2 \mid 2,1)$ und $S\,(2 \mid -0,5)$ ergibt:

$$\begin{aligned} d(S;H) &= \sqrt{(2{,}2-2)^2+(2{,}1-(-0{,}5))^2} \\ &= \sqrt{(0{,}2)^2+(2{,}6)^2} \\ &= \sqrt{0{,}04+6{,}76} \\ &= \sqrt{6{,}8} \\ d(S;H) &= 2{,}6 \end{aligned}$$

Die Punkte H und S sind etwa 2,6 Längeneinheiten entfernt. Dies entspricht 2,6 km und somit 2.600 m.

▶ **Größe der Seefläche berechnen**

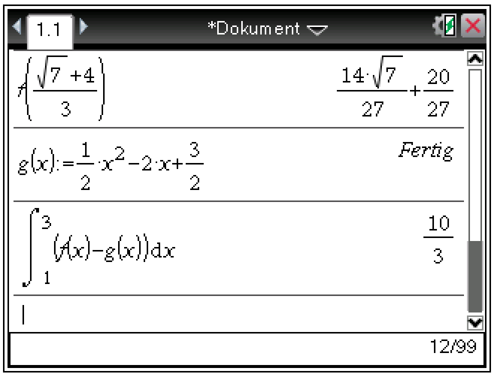
Die Größe der Seefläche entspricht der Größe der Fläche, die von den Graphen von f und g für $1 \leq x \leq 3$ vollständig eingeschlossen wird. Den Inhalt dieser Fläche kannst du mithilfe der Integralrechnung bestimmen.

Im gesamten Intervall verläuft der Graph von f oberhalb des Graphen von g. Für den Inhalt A der Schnittfläche gilt demnach:

$$A = \int_1^3 (f(x)-g(x))\,\mathrm{d}x$$

Die Funktion f hast du im CAS bereits definiert. Definiere nun auch die Funktion g.

Den Befehl für „Integral“ findest du unter `menu → 4 → 3`. Gib die Grenzen 1 und 3 sowie den Integrand $(f(x)-g(x))$ und die Integrationsvariable x ein und bestätige mit `Enter`.



Die Fläche hat einen Inhalt von $\frac{10}{3} = 3{,}\overline{3}$ FE, also $3{,}\overline{3}\,\text{km}^2$.

e) ▶ **Koordinaten des Wendepunkts ermitteln** (14P)

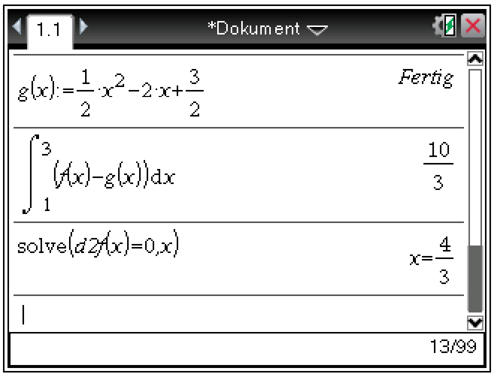
Zunächst sollen die Koordinaten des Wendepunkts W des Graphen von f ermittelt werden. Du weißt aus der Aufgabenstellung, dass der Graph von f **genau einen** Wendepunkt besitzt. Das bedeutet: Bei der Berechnung des Wendepunkts kannst du auf den Nachweis der hinreichenden Bedingung verzichten, weil bereits vorausgesetzt wird, dass tatsächlich ein Wendepunkt existiert.

Du kannst so vorgehen:

- Das notwendige Kriterium für eine Wendestelle x_W lautet: $f''(x_W) = 0$. Setze also $f''(x) = 0$ und löse diese Gleichung mit dem `solve`-Befehl. Die Lösung ist die Wendestelle von f.
- Setze x_W ein in $f(x)$ und berechne so die y-Koordinate des Wendepunkts.

1. Schritt: Wendestelle berechnen

Die zweite Ableitung $f''(x)$ haben wir im CAS bereits als d2f abgespeichert. Du kannst die Gleichung $f''(x) = 0$ also gleich lösen. Nutze dazu den `solve`-Befehl.

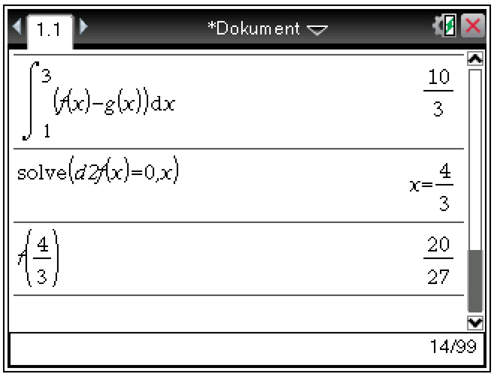


Das CAS liefert die Wendestelle $x_W = \frac{4}{3}$. Da in der Aufgabenstellung gesagt wird, dass der Graph von f genau einen Wendepunkt besitzt, muss du die hinreichende Bedingung nicht nachweisen.

2. Schritt: y-Koordinate berechnen

Setze die Wendestelle $x_W = \frac{4}{3}$ in die Funktionsgleichung von f ein und berechne so die y-Koordinate des Wendepunkts.

Der Graph von f besitzt den Wendepunkt $W\left(\frac{4}{3} \mid \frac{20}{27}\right)$.



▶ Gleichung für den Straßenverlauf bestimmen und diesen einzeichnen

In der Aufgabenstellung wird der Straßenverlauf beschrieben:

- Es handelt sich um eine **geradlinige** Straße, also kann sie durch eine **Gerade** beschrieben werden.
- Sie verläuft durch den Punkt $P\,(1 \mid 1)$.
- Die Straße verläuft **parallel zur Wendetangente** des Graphen von f.

Wir wollen Funktion, welche den Straßenverlauf modelliert, mit s bezeichnen.

Aus jedem der drei Punkte kannst du wichtige Informationen entnehmen. Da die Straße als Gerade beschrieben werden kann, lautet ihre allgemeine Funktionsgleichung $s(x) = m \cdot x + b$, wobei m die Steigung und b der y-Achsenabschnitt der Geraden sind.

Weiterhin weißt du, dass die Gerade **parallel** zur Wendetangente des Graphen von f verläuft. Zwei Geraden verlaufen parallel, wenn sie die gleiche Steigung haben. Damit weißt du: Die Gerade s des Straßenverlaufs hat die **gleiche Steigung** wie die Wendetangente des Graphen von f.

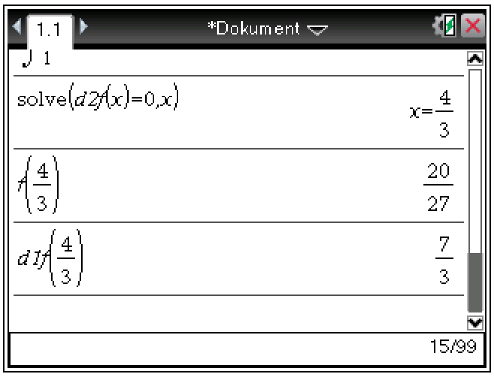
Du kannst also so vorgehen:

- Berechne zunächst die Steigung der Wendetangente von f. Dabei gilt: Die Steigung einer Tangente ist immer gleich der Steigung der Funktion im Berührpunkt.
- Die Gerade s verläuft parallel zur Wendetangente und hat somit die gleiche Steigung. Setze also m in die Geradengleichung von s ein.
- Berechne zuletzt b. Du weißt, dass s durch den Punkt $P(1 \mid 1)$ verläuft. Setze die Koordinaten von P in die Geradengleichung von s ein und löse nach b auf.
- Zeichne die Gerade zuletzt in die Anlage ein.

1. Schritt: Steigung der Wendetangente bestimmen

Die Steigung einer Tangente ist immer gleich der Steigung der Funktion im Berührpunkt. Die Steigung einer Funktion wiederum wird immer durch deren erste Ableitung beschrieben. Bestimme also den Funktionswert der ersten Ableitung f' an der Wendestelle $x_W = \frac{4}{3}$ und erhalte so die Steigung m der Wendetangente.

Die erste Ableitung f' haben wir unter d1f gespeichert.



Das CAS liefert $f'\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{7}{3}$.

Die Wendetangente des Graphen von f hat die Steigung $m = \frac{7}{3}$.

2. Schritt: Werte einsetzen und den y-Achsenabschnitt b bestimmen

Parallele Geraden haben die gleiche Steigung. Also hat auch die Gerade s, welche den Straßenverlauf beschreibt, die Steigung $m = \frac{7}{3}$. Für ihre Gleichung gilt also zunächst:

$$s(x) = \frac{7}{3}x + b.$$

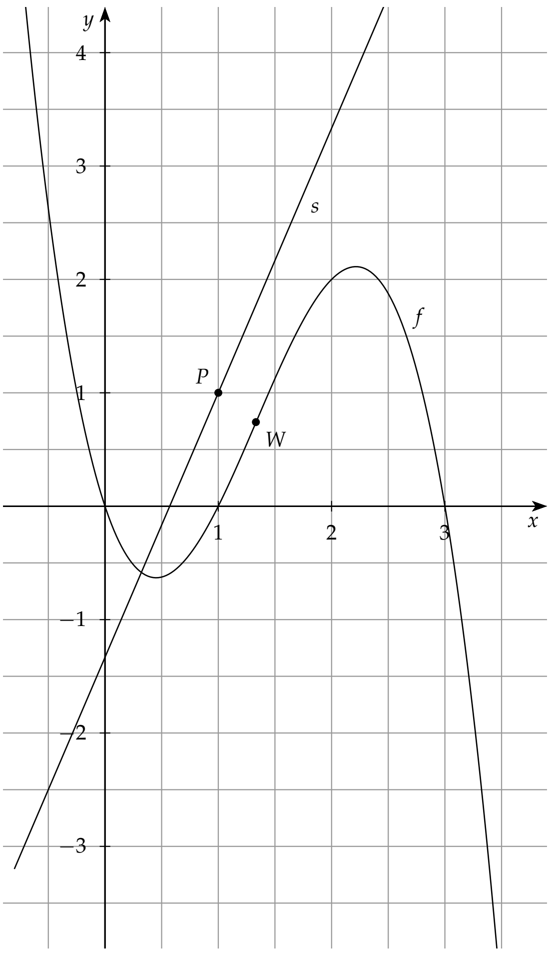
Du weißt, dass die Gerade durch den Punkt $P\,(1 \mid 1)$ verläuft. Setze nun die Koordinaten von P in die Gleichung von s ein und löse nach b auf. Dann hast du die vollständige Geradengleichung von s ermittelt.

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{7}{3} \cdot 1 + b \qquad \left|\, -\frac{7}{3}\right. \\ -\frac{4}{3} &= b \end{aligned}$$

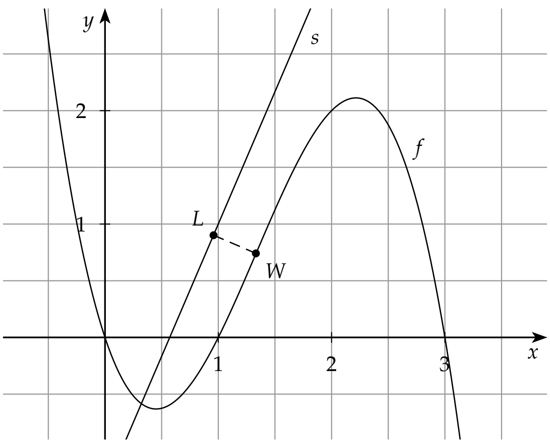
Die Gerade s, die den Straßenverlauf beschreibt, hat die Gleichung $s(x) = \dfrac{7}{3}x - \dfrac{4}{3}$.

3. Schritt: Gerade in die Anlage einzeichnen

Dir genügen zwei Punkte, um eine Gerade exakt zeichnen zu können. Einer ist dir bereits gegeben, nämlich $P(1 \mid 1)$. Einen zweiten kannst du über das Steigungsdreieck ermitteln.



▶ Entfernung des Wendepunktes von der Straße berechnen



Du sollst die Entfernung des Wendepunkts W von der Straße berechnen, d.h. von der Geraden s. Mit „Entfernung" ist dabei der **kleinste Abstand** gemeint. Betrachte die gegenseitige Lage von Wendepunkt und der Geraden: Es gibt genau einen Punkt auf der Geraden s, welcher vom Punkt W den kleinsten Abstand besitzt. Wir haben ihn links in der Zeichnung mit L bezeichnet. Die Entfernung von W zur Geraden s ist gleich dem Abstand der Punkte W und L.

Überlege also, wie du die Koordinaten von L bestimmen kannst. Jeder Punkt auf der Geraden s hat allgemein die Koordinaten $L(s \mid s(x))$, d.h. $L\left(x \mid \frac{7}{3}x - \frac{4}{3}\right)$. Gesucht ist der Punkt L, der den kürzesten Abstand zu Punkt W hat. Für den Abstand d zweier Punkte $P(x_P \mid y_P)$ und $Q(x_Q \mid y_Q)$ gilt allgemein

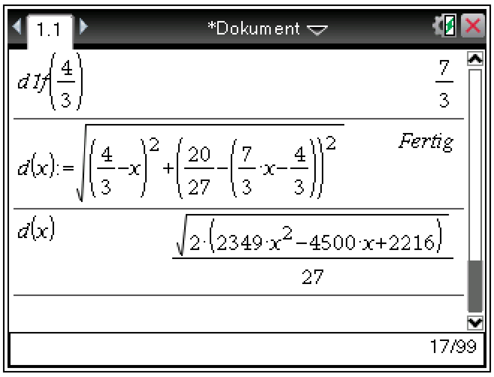
$d = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2}$.

Du kannst so vorgehen:

- Setze die allgemeinen Koordinaten von L und die Koordinaten von W in die Gleichung zur Berechnung des Abstands ein. Du erhältst als Ergebnis einen **Term**, der von x abhängig ist und der dir den Abstand der beiden Punkte in Abhängigkeit von x angibt.
- L soll der Punkt sein, an dem der Abstand minimal wird. Berechne also das **Minimum** des Abstands. Fasse dazu den Term, den du eben berechnet hast, als Funktionsterm $d(x)$ einer Funktion d auf und berechne das Minimum x_M dieser Funktion.
- Setze zuletzt x_M in die Funktion d ein und berechne so den Abstand von W zu L. Dies ist auch der Abstand von W zur Geraden s.

1. Schritt: Abstand $d(x)$ von P und dem allgemeinen Punkt L bestimmen

Setze die Koordinaten von $W\left(\frac{4}{3} \mid \frac{20}{27}\right)$ und von $L\left(x \mid \frac{7}{3}x - \frac{4}{3}\right)$ in obige Gleichung ein. Du kannst dies mit dem CAS erledigen und dir so die Termumformung ersparen.



Du kannst diesen Term gleich als Funktionsterm $d(x)$ abspeichern. Die Funktion d gibt dir in Abhängigkeit von x den Abstand von W und einem Punkt auf der Geraden s an.

2. Schritt: Minimum der Abstandsfunktion d berechnen

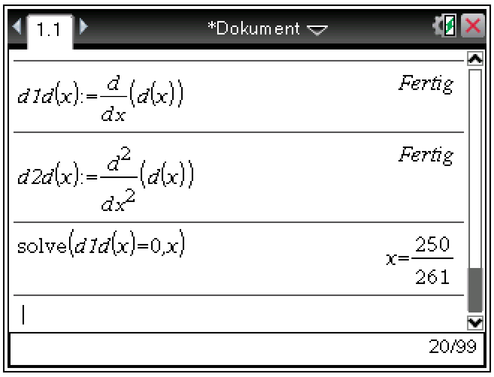
Du kannst das Minimum von d über das notwendige und hinreichende Kriterium ermitteln. Leite dazu zunächst d zweimal ab. Das notwendige Kriterium für Extremstellen lautet

$d'(x) = 0.$

Löse diese Gleichung mit dem `solve`-Befehl und du erhältst die potentielle Extremstelle x_M. Setze dann x_M in zweite Ableitung d'' ein. Wenn sich ein **positiver** Wert ergibt, so hast du das Minimum nachgewiesen.

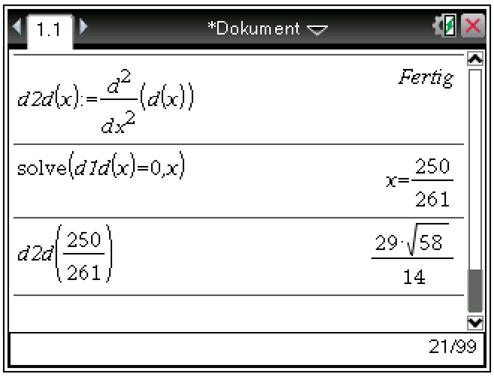
Den Befehl für „Ableiten" findest du unter `menu → 4 → 1`. Bestimme die erste und die zweite Ableitung d' und d'' von f mit deinem CAS und speichere sie ab. Wir speichern sie als d1d und d2d.

Löse anschließend die Gleichung $d'(x) = 0$ mit dem `solve`-Befehl und erhalte so die potentiellen Extremstellen von d.



Setze jetzt $x_M = \frac{250}{261}$ in die zweite Ableitung d'' ein und untersuche, ob es sich hierbei um ein Minimum handelt. Dies ist der Fall, wenn die zweite Ableitung einen positiven Wert annimmt.

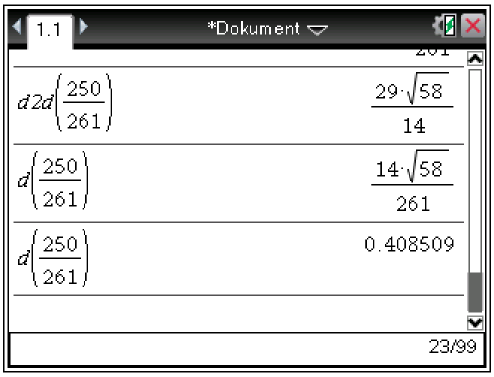
Mit $d''\left(\frac{250}{261}\right) = \frac{29\cdot\sqrt{58}}{14} > 0$ ist die hinreichende Bedingung für ein **Minimum** erfüllt. Der Punkt auf der Geraden s mit dem kleinsten Abstand von Punkt W liegt also an der Stelle $x = \frac{250}{261}$ vor.



3. Schritt: Minimalen Abstand berechnen

Der Abstand von W zum Punkt L ist gerade der Abstand von W zur Geraden s. Der Abstand von W zu L wird dir durch die Funktion d gegeben. Setze $x = \frac{250}{261}$ in die Gleichung von d ein und erhalte die Entfernung des Wendepunkts W von der Geraden s, welche die Straße darstellt.

Der Punkt W ist 0,4085 LE von der Straße entfernt.



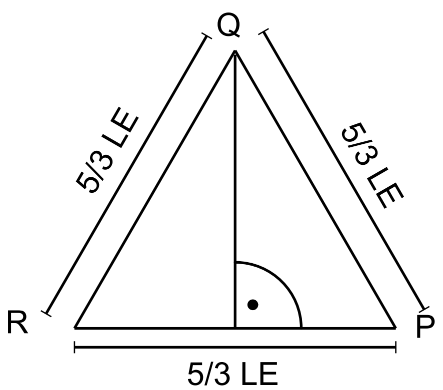
Eine LE im Koordinatensystem entspricht 1 km in der Wirklichkeit. Du sollst die Entfernung auf Meter genau angeben. Die „Meter" treten bei einer Kilometerangabe an der dritten Stelle nach dem Komma auf. Gib die Entfernung also auf 3 Nachkommastellen genau an:

Der Wendepunkt W ist von der Straße etwa 0,409 km, d.h. etwa 409 m entfernt.

f) ▶ **Koordinaten der Punkte berechnen** (4P)

Der Punkt $P\,(3 \mid 0)$ liegt auf der x-Achse. Gemeinsam mit zwei anderen Punkten Q und R soll er ein gleichseitiges Dreieck bilden. Folgendes ist bekannt:

- Der Kurs soll insgesamt 5 km lang sein. Er entspricht dem **Umfang** des gleichseitigen Dreiecks. Jede Seite ist also $\frac{5}{3}$ km lang.
- Eine der Bahnen verläuft in Ost-West-Richtung und liegt damit direkt auf der x-Achse. Deshalb liegt auch ein zweiter Punkt des Dreiecks auf der x-Achse.



Der Punkt P hat die Koordinaten $P(3 \mid 0)$. Wir wollen mit R den Punkt bezeichnen, der $\frac{5}{3}$ LE von Punkt P entfernt auf der x-Achse liegt. Für seine x-Koordinate gilt dann:

$$\begin{aligned} x_R &= 3 - \frac{5}{3} \\ &= \frac{9}{3} - \frac{5}{3} \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

R hat die Koordinaten $R\left(\frac{4}{3} \mid 0\right)$.

Nun zu Punkt Q. Gemeinsam mit Punkt P und dem **Mittelpunkt** der Strecke $\overline{PR}$ bildet er ein rechtwinkliges Dreieck mit Hypotenuse $\overline{PQ}$. Die y-Koordinate von Punkt Q ist dabei genau die **Höhe** des gleichseitigen Dreiecks PQR. Mit dem Satz des Pythagoras kannst du diese Höhe berechnen:

$$
\begin{aligned}
\overline{PQ}^2 &= \left(\tfrac{1}{2}\overline{PR}\right)^2 + h^2 && \mid -\left(\tfrac{1}{2}\overline{PR}\right)^2 \\
\overline{PQ}^2 - \left(\tfrac{1}{2}\overline{PR}\right)^2 &= h^2 \\
\left(\frac{5}{3}\right)^2 - \left(\frac{5}{6}\right)^2 &= h^2 \\
\frac{25}{9} - \frac{25}{36} &= h^2 \\
\frac{100}{36} - \frac{25}{36} &= h^2 \\
\frac{75}{36} &= h^2 && \mid \sqrt{} \\
\frac{\sqrt{75}}{6} &= h \\
\frac{5 \cdot \sqrt{3}}{6} &= h
\end{aligned}
$$

Dies ist die ***y*-Koordinate** von Punkt Q. Für seine x-Koordinate gilt:

$$
\begin{aligned}
x_Q &= 3 - \frac{1}{2} \cdot \overline{PR} \\
x_Q &= 3 - \frac{5}{6} \\
x_Q &= \frac{18}{6} - \frac{5}{6} \\
x_Q &= \frac{13}{6}
\end{aligned}
$$

Die Bojen befinden sich also in den Punkten $Q\left(\frac{13}{6} \mid \frac{5\sqrt{3}}{6}\right)$ und $R\left(\frac{4}{3} \mid 0\right)$.