Die Schülerzeitung „Ja" hat an ihrer Schule eine Umfrage bezüglich Handys durchgeführt. Dabei fanden die Herausgeber der Schülerzeitung heraus, dass 70% der Jungen ein Handy besitzen, bei den Mädchen waren es 80%.
Gehen Sie im folgenden davon aus, dass diese statistischen Werte als Wahrscheinlichkeiten betrachtet werden können.

a) ▶ **Wahrscheinlichkeit für** 15 **Handys** (10P)

Sei $Z$ die Anzahl der Jungen, die ein Handy besitzen. Dann ist $Z$ binomialverteilt mit $n = 20$ und $p = 0,7$.

$P(Z = 15) = \binom{20}{15} \cdot 0,7^{15} \cdot 0,3^5 = 0,1788 \mathrel{\widehat{=}} 17,88\%$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von $17,88\%$ besitzen 15 von 20 Jungen ein Handy.

▶ **Wahrscheinlichkeit für mindestens** 60 **Handys**

Sei $Z$ wieder die Anzahl der Jungen mit Handys. Dann ist $Z$ wieder binomialverteilt, diesmal mit $n = 100$ und $p = 0,7$. Lies die benötigten Wahrscheinlichkeiten in der stochastischen Tabelle ab.

$P(Z \geq 60) = 1 - P(Z \leq 59) = 1 - (1 - 0,9875) = 0,9875 \mathrel{\widehat{=}} 98,75\%$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von $98,75\%$ befinden sich unter 100 Jungs mindestens 60 Handys.

▶ **Wahrscheinlichkeit für mindestens** 40 **und höchstens** 65 **Handys**

Sei $Z$ die Anzahl der Mädchen mit Handys. Dann ist $Z$ binomialverteilt, mit $n = 100$ und $p = 0,8$.

$$\begin{aligned} P(40 \leq Z \leq 65) &= (1 - P(Z \leq 39)) + P(Z \leq 65) \\ &= (1 - 1) + 0,9997 = 0,9997 \mathrel{\widehat{=}} 99,97\% \end{aligned}$$

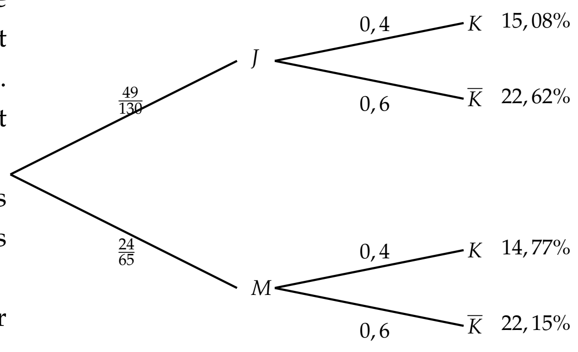
Mit einer Wahrscheinlichkeit von $99,97\%$ befinden sich unter 100 Mädchen mindestens 40 und höchstens 65 Mädchen mit Handys.

b) ▶ **Wahrscheinlichkeit für einen Jungen berechnen** (12P)

Veranschauliche dir diesen Sachverhalt in einem Baumdiagramm.

Zum einen weißt du, dass sich in der Klasse insgesamt $14 + 12 = 26$ Schülerinnen und Schüler befinden.

Die Wahrscheinlichkeit für einen Jungen liegt also erst einmal bei $\frac{14}{26} = \frac{7}{13}$. Von den Jungs wiederum besitzen 70% ein Handy. Die Wahrscheinlichkeit dafür, einen Jungen mit Handy zu finden, liegt also bei $\frac{7}{13} \cdot 0,7 = \frac{49}{130}$. Die Wahrscheinlichkeit, ein Mädchen mit Handy zu finden, liegt bei $\frac{12}{26} \cdot 0,8 = \frac{24}{65}$
Sei $J$ das Ereignis „Junge mit Handy", $M$ das Ereignis „Mädchen mit Handy" und $K$ das Ereignis „Klingeln".
Du weißt, dass 40% aller Jugendlichen ihr Handy nicht lautlos stellen.



Du sollst berechnen, mit welcher Wahrscheinlichkeit das klingelnde Handy einem Jungen gehört. Das ist genau die **bedingte Wahrscheinlichkeit** $P_J(K)$:

$$P_J(K) = \frac{P(J \cap K)}{P(K)}$$
$$= \frac{0,1508}{0,1508 + 0,1477} = 0,5052 \mathrel{\widehat{=}} 37,7\%$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von $50,52\%$ gehört das klingelnde Handy einem Jungen.

### ▶ Anzahl der Mädchen berechnen

Halte die Verteilung von Jungs und Mädchen mit Handys zunächst in einer Vierfeldertafel fest.

In der Klasse befinden sich insgesamt $12 + 18 = 30$ Schülerinnen und Schüler. 4 Jungen geben zu, ihr Handy nicht auf lautlos zu stellen.

Insgesamt stellen 40% aller Jugendlichen ihr Handy nicht auf lautlos. In diesem Fall wären das also $0,4 \cdot 30 = 12$ Jugendliche.

Damit müssen es 8 Mädchen sein, die ihr Handy nicht auf lautlos gestellt haben.

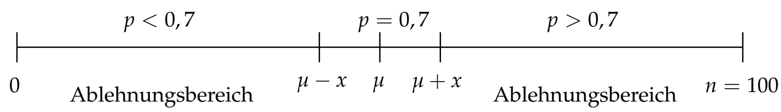
| | Jungs mit Handy | Mädchen mit Handy | Gesamt |
|---|---|---|---|
| Lautlos | 8 | 10 | 18 |
| Nicht lautlos | 4 | 8 | 12 |
| | 12 | 18 | 30 |

c) ### ▶ Entscheidungsregel bestimmen (12P)

$H_0 : p_0 = 0,7$ besagt, dass in Wirklichkeit doch 70% der Jungs ein Handy besitzen. Es soll eine Entscheidungsregel mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5% bestimmt werden.

Sei $Z$ die Anzahl der Jungs, die ein Handy besitzen. $Z$ ist binomialverteilt mit $n = 100$ und $p = 0,7$. Betrachte zunächst Erwartungswert von $Z$:

$\mu = n \cdot p = 100 \cdot 0,7 = 70$




Gesucht ist nun eine Zahl $x$, für die die Ungleichung $P(70 - x \leq Z \leq 70 + x) > 0,95$ gerade noch erfüllt wird:

$$P(70 - x \leq Z \leq 70 + x) = P(Z \leq 70 + x) - P(Z \leq 70 - x) > 0,95$$

Betrachte also in der stochastischen Tabelle für $n = 100$ und $p = 0,7$ den Wert $k = 70$.

Fahre nun im gleichmäßigen Abstand von der 70 weg und betrachte die Paare, wie z.B. 69 und 71, dann 68 und 72 usw.

Dies tust du so lange, bis die Differenz der beiden Werte größer als 0,95 wird:

Du findest so das Paar 60 und 80:

$$\begin{aligned} P(Z \leq 70+10) - P(Z \leq 70-10) &= P(Z \leq 80) - P(Z \leq 60) \\ &= (1-0,0089) - (1-0,979) = 0,9701 \end{aligned}$$

Wenn $60 \leq Z \leq 80$ ist, wird die Hypothese $H_0$ angenommen, sonst wird sie verworfen.

**▶ Fehlerwahrscheinlichkeit berechnen**

Betrachte eine neue Zufallsgröße $X$, welche die Anzahl der Jungs mit Handy angibt. Diese ist auch binomialverteilt, allerdings mit $n = 100$ und $p = 0,8$.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Hypothese $H_0$ angenommen wird, obwohl eigentlich 80% der Jungen ein Handy besitzen, ist genau die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Zufallsgröße $X$ mit $n = 100$ und $p = 0,8$ einen Wert zwischen $60 \leq X \leq 80$ annimmt:

$$\begin{aligned} P(60 \leq X \leq 80) &= P(X \leq 80) - P(X \leq 60) \\ &= (1-0,4502) - (1-1) = 0,5498 \mathrel{\widehat{=}} 54,98\% \end{aligned}$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von $54,98\%$ wird die Hypothese $H_0$ angenommen, obwohl eigentlich 80% der Jungen ein Handy besitzen.

d) **▶ Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse bestimmen** (9P)

Hier ist die Wahrscheinlichkeit dafür zu bestimmen, dass sich unter 20 Jungen und 10 Mädchen nicht ein Handy befindet, welches nicht auf lautlos gestellt wurde.

70% der Jungen besitzen ein Handy und 80% der Mädchen. Für die Klasse lässt sich also ein Erwartungswert berechnen:

$\mu = 0,7 \cdot 20 + 0,8 \cdot 10 = 22$

Erwartungsgemäß befinden sich in dieser Klasse also 22 Handys. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Handy auf lautlos gestellt ist, beträgt 60%.

Damit ist die Wahrscheinlichkeit für 22 auf lautlos gestellte Handys$0,6^{22} = 0,0000131 \mathrel{\widehat{=}} 0,0013\%$.

Nun zu Ereignis B. Es befanden sich 5 Mädchen im Zimmer. 80% der Mädchen besitzen ein Handy. Damit ergibt sich ein Erwartungswert von $\mu = 0,8 \cdot 5 = 4$.

Es kann also mit 4 Handys gerechnet werden. Ein Handy ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 40% **nicht** auf lautlos gestellt.

Die Wahrscheinlichkeit für 4 nicht auf lautlos gestellte Handys ist also $0,4^4 = 0,0256 \mathrel{\widehat{=}} 2,56\%$

e) **▶ Wahrscheinlichkeit für $k$ Handys berechnen** (6P)

Berechne zunächst eine Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein **Jugendlicher** aus dieser Gruppe ein Handy besitzt, also unabhängig davon, ob Junge oder Mädchen.

Bestimme dazu den Erwartungswert: $\mu = 0,93 \cdot n + 0,97 \cdot m$.

Der prozentuale Anteil der Jugendlichen mit Handy liegt also bei $\dfrac{0,93n + 0,97m}{n+m}$.

Dies ist auch die Wahrscheinlichkeit dafür, einen Jugendlichen mit Handy in dieser Gruppe zu finden.

Es werden nun $k$ Jugendliche ausgewählt, man weiß nichts über das Geschlecht dieser Jugendlichen und du sollst die Wahrscheinlichkeit dafür bestimmen, dass diese alle ein Handy besitzen.

Aus der Pfadregel ergibt sich die Wahrscheinlichkeit: $p = \left(\dfrac{0,93n + 0,97m}{n+m}\right)^k$.