a) (1) ▶ **Erstellen eines vollständigen Baumdiagramms** (7P)

Deine Aufgabe ist es hier, zum in der Aufgabenstellung beschriebenen Sachverhalt ein vollständiges Baumdiagramm zu erstellen. Der Aufgabenstellung kannst du dabei entnehmen, dass bei der Fernsehsendung „Sport in 3D" mit einer Wahrscheinlichkeit von 4 % Bildstörungen (Ereignis B) auftreten. Ist das Bild dann gestört, so treten mit einer Wahrscheinlichkeit von 60 % auch Tonstörungen auf (Ereignis T). Ist das Bild hingegen einwandfrei ($\overline{B}$), so ist auch der Ton mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 % einwandfrei ($\overline{T}$).

Hier handelt es sich also um ein zweistufiges Zufallsexperiment. Auf der ersten Stufe wird dabei unterschieden, ob

- Bildstörungen auftreten, oder nicht. Also: B oder Gegenereignis $\overline{B}$.

Auf der zweiten Stufe wird dann jeweils unterschieden, ob

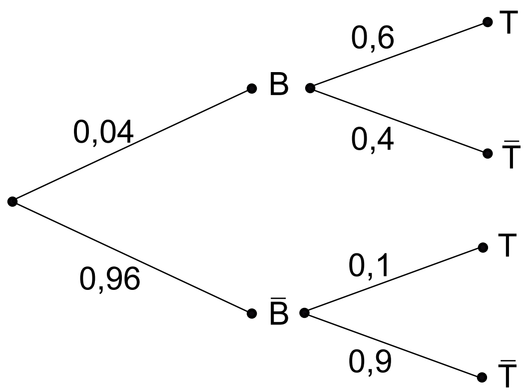
- Tonstörungen auftreten, oder nicht. Also: T oder Gegenereignis $\overline{T}$.

Weiterhin musst du hier beachten, dass die Wahrscheinlichkeit für die Ereignisse T und $\overline{T}$ abhängig vom Ereignis sind, welches zuvor eingetreten ist, nämlich B oder $\overline{B}$, das heißt, hier handelt es sich je um eine bedingte Wahrscheinlichkeit.

- Ereignis B: Wahrscheinlichkeit für Tonstörungen: $P_B(T) = 0,6$.
- Ereignis $\overline{B}$: Wahrscheinlichkeit für Tonstörungen: $P_{\overline{B}}(T) = 0,1$.

Erstelle auf Grundlage dieser Erkenntnisse das Baumdiagramm zum Sachverhalt.

Baumdiagramm:



(2) ▶ **Überprüfen, ob die Ereignisse *B* und *T* stochastisch unabhängig sind**

Nun sollst du überprüfen, ob die Ereignisse B („In der 3D-Übertragung treten Bildstörungen auf") und T („In der 3D-Übertragung treten Tonstörungen auf") stochastisch unabhängig sind. Bevor du jedoch überprüfen kannst, ob die Ereignisse B und T stochastisch unabhängig sind, musst du zunächst ermitteln, mit welcher Wahrscheinlichkeit $P(T)$, unabhängig vom vorherigen Ereignis, Tonstörungen eintreten, da die stochastische Unabhängigkeit ohne $P(T)$ nicht überprüfbar wäre. Dabei sind diese Ereignisse zu betrachten:

- Es treten Tonstörungen (T) auf, unter der Bedingung, dass es vorher Bildstörungen (B) gab.
- Es treten Tonstörungen (T) auf, unter der Bedingung, dass es keine Bildstörungen ($\overline{B}$) gab.

Die allgemeine Wahrscheinlichkeit $P(T)$ für das Ereignis T berechnest du dann auf Grundlage der obigen Aussagen, sowohl über Pfadaddition als auch Pfadmultiplikation.

Beim anschließendem Untersuchen der stochastischen Unabhängigkeit gibt es zwei verschiedene Lösungswege. Zum Einen lässt sich diese mit Hilfe einer bedingten Wahrscheinlichkeit:

- Zwei Ereignisse A und B sind stochastisch unabhängig, wenn gilt: $P(B) = P_A(B)$

und zum Anderen mit Hilfe der Wahrscheinlichkeit für das zusammengesetzte Ereignis:

- Zwei Ereignisse A und B sind stochastisch unabhängig, wenn gilt: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

überprüfen.

1. Schritt: Bestimmen der Wahrscheinlichkeit $P(T)$ für Ereignis T

Die Wahrscheinlichkeit $P(T)$ für das Ereignis T berechnest du über die Pfadregeln. Betrachte dazu das oben angefertigte Baumdiagramm und berechne die Wahrscheinlichkeit für die Äste, welche das Ereignis der Tonstörung repräsentieren (Pfadmultiplikation) und addiere die berechneten Wahrscheinlichkeiten anschließend (Pfadaddition). Du solltest zu folgendem Ergebnis gekommen sein:

$P(T) = P(B) \cdot P_B(T) + P(\overline{B}) \cdot P_{\overline{B}}(T) = 0{,}04 \cdot 0{,}6 + 0{,}96 \cdot 0{,}1 = 0{,}12.$

Die Wahrscheinlichkeit, dass Tonstörungen im Allgemeinen eintreten, liegt bei $P(T) = 0{,}12$.

2. Schritt: Überprüfen der stochastischen Unabhängigkeit der Ereignisse B und T

▶▶ Lösungsweg A: Überprüfen über bedingte Wahrscheinlichkeit

Laut dem oben angeführten Satz, muss bei stochastischer Unabhängigkeit für die Ereignisse B und T folgender Zusammenhang gelten:

$P(T) = P_B(T)$.

$P(T)$ hast du im vorherigen Lösungsschritt bestimmt, für dieses galt: $P(T) = 0{,}12$. Die bedingte Wahrscheinlichkeit $P_B(T)$ beschreibt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es Tonstörungen gibt, unter der Bedingung das Bildstörungen eingetreten sind. Für diese Wahrscheinlichkeit gilt also: $P_B(T) = 0{,}6$. Eingesetzt in obigen Zusammenhang ergibt sich: $P(T) = P_B(T) \;\Rightarrow\; 0{,}12 \neq 0{,}6$.

$\Longrightarrow$ Die Ereignisse B und T sind stochastisch abhängig.

▶▶ Lösungsweg B: Überprüfen über zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit

Nach dem oben angeführten Satz, muss bei stochastischer Unabhängigkeit der Ereignisse B und T folgender Zusammenhang erfüllt sein:

$P(B \cap T) = P(B) \cdot P(T)$

$P(B \cap T)$ beschreibt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Bildstörungen **und** Tonstörungen auftreten. Die zugehörige Wahrscheinlichkeit ergibt sich über die Pfadmultiplikation:

$P(B \cap T) = 0,04 \cdot 0,6 = 0,024.$

Eingesetzt in den oben gezeigten Zusammenhang ergibt sich:

$P(B \cap T) = P(B) \cdot P(T) \;\Rightarrow\; 0,024 = 0,04 \cdot 0,12 \;\Rightarrow\; 0,024 \neq 0,0048.$

$\Longrightarrow$ Die Ereignisse B und T sind stochastisch abhängig.

b) **▶ Berechnen der Wahrscheinlichkeit für einwandfreies Bild, falls der Ton gestört ist** (3P)

Deine Aufgabe ist es hier, die Wahrscheinlichkeit für ein einwandfreies Bild zu berechnen, falls der Ton gestört ist. Anders formuliert: Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das TV-Gerät ein einwandfreies Bild zeigt, **unter der Bedingung**, dass der Ton bereits gestört ist.
Dies ist eine **bedingte Wahrscheinlichkeit**, wobei die Bedingung durch Ereignis T (Tonstörung) gegeben ist. In Formeln lautet sie: $P_T(\overline{B})$.

Rechne weiter über die Formel zur bedingten Wahrscheinlichkeit (Satz von Bayes). Die benötigten Wahrscheinlichkeiten kannst du deinem im Aufgabenteil a erstellten Baumdiagramm entnehmen.

$$P_T(\overline{B}) = \frac{P(T \cap \overline{B})}{P(T)}$$

Mit $P(T) = 0,12$ (siehe Aufgabenteil a) und $P(T \cap \overline{B})$:
$P(T \cap \overline{B}) = P(\overline{B} \cap T) = 0,96 \cdot 0,1 = 0,096.$

$$P_T(\overline{B}) = \frac{P(\overline{B} \cap T)}{P(T)}$$

$$P_T(\overline{B}) = \frac{0,096}{0,12}$$

$$P_T(\overline{B}) = 0,8$$

$\Longrightarrow$ Die Wahrscheinlichkeit für einwandfreies Bild, unter der Bedingung, dass der Ton gestört ist, beträgt 0,8 bzw. 80 %.

c) **▶ Berechnen des maximalen Wert $P(Z)$** (5P)

Der Aufgabenstellung kannst du nun entnehmen, dass ein weiteres Ereignis Z betrachtet werden soll und zwar: „Ein Zuschauer wechselt den Sender“. Du weißt von diesem Ereignis, dass wenn keine Bildstörung eintritt, tritt Z mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens $\frac{1}{6}$ ein. Falls nun aber doch eine Bildstörung eintritt, so wechselt der Zuschauer mit Sicherheit den Sender. Deine Aufgabe ist es jetzt, den maximalen Wert für die Wahrscheinlichkeit $P(Z)$ des Ereignisses Z zu berechnen.

Um diese Aufgabe zu lösen, musst du also wieder Ereignis B („Bild gestört") betrachten, denn das Verhalten des Zuschauers beim Senderwechsel ist abhängig von den herrschenden Bildverhältnissen. Um zu sehen, wie Ereignis B und Z zusammenhängen, ist es hier sinnvoll, den Sachverhalt in einem Baumdiagramm darzustellen. Auch hier handelt es sich um ein zweistufiges Zufallsexperiment. Auf der ersten Stufe wird unterschieden zwischen:

- Bildstörung B oder keine Bildstörung $\overline{B}$.

Auf der zweiten Stufe wird dann das Verhalten der Zuschauer bezüglich des Senderwechsels betrachtet, also wird zwischen

- Zuschauer wechselt Sender Z und Zuschauer wechselt Sender nicht $\overline{Z}$

unterschieden.

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Zuschauer den Sender wechselt unter der Bedingung, dass das Bild (B) gestört ist, liegt bei 100 %. Das heißt, das Ereignis $\overline{Z}$ unter dieser Bedingung nicht eintreten.

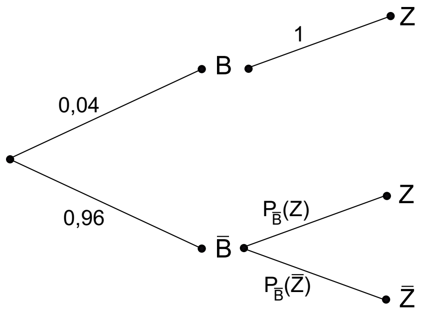
Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Zuschauer den Sender wechselt (Z) unter der Bedingung, dass das Bild nicht gestört ($\overline{B}$), ist kleiner als $\frac{1}{6}$, es gilt also:

- $0 \leq P_{\overline{B}}(Z) \leq \frac{1}{6}$.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Zuschauer den Sender nicht wechselt ($\overline{Z}$) unter der Bedingung, dass das Bild nicht gestört ist ($\overline{B}$), ist größer als $\frac{1}{6}$, es gilt also:

- $\frac{1}{6} \leq P_{\overline{B}}(\overline{Z}) \leq 1$.

Das resultierende Baumdiagramm sieht also so aus:



Die maximale Wahrscheinlichkeit $P(Z)$ ermittelst du, indem du zunächst die entsprechenden Pfade im Baumdiagramm betrachtest und über Pfadaddition und Pfadmultiplikation verknüpfst. Der daraus entstehenden Ungleichung kannst du dann die maximale Wahrscheinlichkeit $P(Z)$ entnehmen.

Berechnen des maximalen Werts $P(Z)$

Die Wahrscheinlichkeit $P(Z)$ setzt sich aus den Wahrscheinlichkeiten für die Ereignisse

- gestörtes Bild B und Senderwechsel Z und
- nicht gestörtes Bild $\overline{B}$ und Senderwechsel Z

zusammen und berechnet sich demnach wie folgt:

$P(Z) = P(B) \cdot P_B(Z) + P(\overline{B}) \cdot P_{\overline{B}}(Z)$

Mit der Ungleichung für $P_{\overline{B}}(Z)$ ergibt sich:

$P(Z) \leq 0,04 \cdot 1 + 0,96 \cdot \frac{1}{6} \;\Leftrightarrow\; P(Z) \leq 0,2$

$\Longrightarrow$ Der Ungleichung kannst du entnehmen, dass der maximale Wert $P(Z) = 0,2$ ist.

d) ▶ **Berechnen der Mindestgröße von p** (4P)

Der Aufgabenstellung kannst du entnehmen, dass im Studio ein Fußballtor aufgebaut ist, auf das Sportler und Studiogäste schießen dürfen, wobei ein Gast das Tor mit einer unbekannten Wahrscheinlichkeit p trifft.
Deine Aufgabe ist es hier, eine Mindestgröße von p so zu berechnen, dass der Studiogast bei 6 Versuchen mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % mindestens einmal trifft.

Betrachte dazu die Zufallsgröße X, welche die Anzahl der Treffer beschreibt. X kann als binomialverteilte Zufallsgröße angenommen werden, da diese nur folgende zwei Ausprägungen besitzt

- „Gast trifft das Tor“ und
- „Gast trifft das Tor nicht“,

außerdem bleibt die Wahrscheinlichkeit, dass ein Studiogast das Tor trifft, mit p konstant. Auf Grundlage dessen kann hier näherungsweise von einem Ziehen mit Zurücklegen ausgegangen werden. Das heißt, X ist binomialverteilt mit unbekanntem p und einem Stichprobenumfang von $n = 6$, da der Studiogast insgesamt 6 Versuche besitzt. Nun soll Wahrscheinlichkeit p so angepasst werden, dass folgender Zusammenhang erfüllt ist:
$P(X \geq 1) \geq 0,95$.

Diese Ungleichung drückt aus, dass die Wahrscheinlichkeit, mit welcher ein Studiogast mindestens einmal bei 6 Versuchen das Tor trifft, größer als 95 % sein soll.
Löse die oben stehende Ungleichung mit dem zugehörigen Gegenereignis nach dem unbekannten p auf.

Ermitteln von p

$P(X \geq 1) \;\geq\; 0,95$

Mit dem zugehörigen Gegenereignis

„Das Tor wird weniger als einmal, also kein Mal getroffen“:

$\Rightarrow\; P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0)$

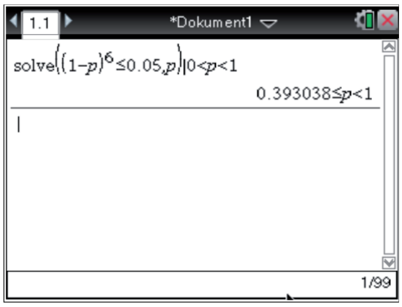
ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
1 - P(X = 0) &\geq 0,95 && \mid -1 \\
-P(X = 0) &\geq -0,05 && \mid :(-1) \\
P(X = 0) &\leq 0,05
\end{aligned}
$$

Einsetzen der Formel zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten binomialverteilter Zufallsgrößen, hier mit den Parametern p unbekannt, $k = 0$ und $n = 6$:

$\binom{6}{0} \cdot p^0 \cdot (1-p)^{6-0} \leq 0{,}05$

Löse diese Ungleichung mit dem `solve`-Befehl deines CAS. Dieser Befehl löst die in die Befehlsklammer eingetragene Gleichung bzw. Ungleichung, nach jener Variablen, welche getrennt durch ein Komma, hinter die Gleichung bzw. Ungleichung eingetragen wird (siehe rechts). Beachte, dass $0 < p < 1$ gilt.



$\Longrightarrow$ Damit der Studiogast mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % bei 6 Versuchen mindestens einmal das Tor trifft, muss die Trefferwahrscheinlichkeit mindestens bei 0,393 bzw. bei 39,3 % liegen.

e) (1) ▶ **Bestimmen von $f(p)$** (6P)

Hier sollst du nun Funktion f mit dem Funktionsterm $f(p)$ betrachten. Diese Funktion f soll die Wahrscheinlichkeit dafür beschreiben, dass ein Gast bei 6 Versuchen das Fußballtor aus Teilaufgabe d) höchstens einmal trifft. Deine Aufgabe ist es dabei den Funktionsterm $f(p)$ dieser Funktion f zu bestimmen.

Im Aufgabenteil d) hast du die binomialverteilte Zufallsgröße X mit p unbekannt und $n = 6$ betrachtet. Diese Zufallsgröße hat die Anzahl der Treffer eines Studiogastes beschrieben. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Gast bei 6 Versuchen höchstens einmal trifft, entspricht also der Wahrscheinlichkeit, dass X einen Wert kleiner gleich 1 annimmt und lässt sich über folgenden Term beschreiben:

$P(X \leq 1)$.

Willst du nun $f(p)$ bestimmen, so setzt du in den Ansatz oben die Formel für die Berechnung der Wahrscheinlichkeit einer binomialverteilten Zufallsgrößen ein und formst um.

Bestimmen von $f(p)$

Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis $X \leq 1$ setzt sich aus den Wahrscheinlichkeiten für die Ereignisse $X = 0$ und $X = 1$ zusammen, da das Ereignis „höchstens ein Treffer" eben „kein Treffer" und „ein Treffer" beinhaltet. Es gilt also:

$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1)$.

Da f die Wahrscheinlichkeit $P(X \leq 1)$ in Abhängigkeit p beschreiben soll, bestimmt sich der Funktionsterm $f(p)$ wie folgt:

$$P(X \leq 1) = f(p) = P(X = 0) + P(X = 1)$$

$$f(p) = \binom{6}{0} \cdot p^0 \cdot (1-p)^{6-0} + \binom{6}{1} \cdot p^1 \cdot (1-p)^{6-1} \qquad \text{Mit } \binom{6}{0} = 1 \text{ und } \binom{6}{1} = 6$$

$$f(p) = 1 \cdot 1 \cdot (1-p)^6 + 6 \cdot p^1 \cdot (1-p)^5 \qquad \text{Ausklammern von } (1-p)^5$$

$$f(p) = (1-p)^5 \cdot ((1-p) + 6 \cdot p)$$

$$f(p) = (1-p)^5 \cdot (1 - p + 6 \cdot p)$$

$$f(p) = (1-p)^5 \cdot (1 + 5 \cdot p)$$

$\Longrightarrow$ Der Funktionsterm $f(p)$ von f lautet also:

$f(p) = (1-p)^5 \cdot (1 + 5 \cdot p)$ mit $0 < p < 1$.

(2) **► Zeigen, dass Funktion f streng monoton fallend ist**

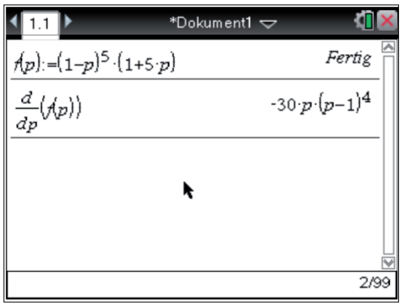
Nun ist es deine Aufgabe zu zeigen, dass Funktion f streng monoton fallend ist. Ist ein beliebige Funktion streng monoton fallend, so besitzt diese an jeder Stelle einen Ableitungswert echt kleiner Null. Für die erste Ableitung f' von f muss also gelten:

$f'(p) < 0$, für $0 < p < 1$.

Bestimme beim Lösen dieser Aufgabe also im ersten Schritt die erste Ableitungsfunktion f' von f mit deinem CAS, um im zweiten Schritt begründen zu können, dass diese für $0 < p < 1$ nur Funktionswerte echt kleiner Null annimmt.

1. Schritt: Bestimmen der ersten Ableitungsfunktion f' von f

Die erste Ableitungsfunktion von f kannst du mit deinem CAS bestimmen.



Lege dazu den Funktionsterm von f zunächst im Calculator-Modus deines CAS fest und bestimme die erste Ableitungsfunktion f' von f über den Ableitungsbefehl, welchen du über diese Eingabenfolge in den Calculator-Modus einfügst:

`menu → 4: Analysis → 1: Ableitung`

Wende den Ableitungsbefehl wie rechts auf f an, um den Term der ersten Ableitungsfunktion f' zu bestimmen.
Der Term der ersten Ableitungsbefehl von f ist also:

$f'(p) = -30 \cdot p \cdot (p-1)^4$, für $0 < p < 1$.

2. Schritt: Zeigen, dass $f'(p) < 0$ für $0 < p < 1$ gilt

Willst du zeigen, dass $f'(p) < 0$ für $0 < p < 1$ gilt, so kann es hilfreich sein, wenn du den Term von f' als ein Produkt zweier Funktion u und v betrachtest:

$f'(p) = u(p) \cdot v(p)$ mit $\quad u(p) = -30 \cdot p \quad$ und $\quad v(p) = (p-1)^4$.

$f'(p)$ kann also als Produkt der Funktionen $u(p)$ und $v(p)$ angesehen werden. Sind nun die Funktionswerte **entweder** von $u(p)$ **oder** von $v(p)$ für jedes p für welches $0 < p < 1$ gilt negativ, so hast du gezeigt, dass $f'(p) < 0$ gilt und f somit streng monoton fallend ist. Es muss also einer dieser Fälle eintreten:

1. Fall: $u(p)$ ist für jedes p mit $0 < p < 1$ negativ und $v(p)$ ist für jedes p mit $0 < p < 1$ positiv oder

2. Fall: $v(p)$ ist für jedes p mit $0 < p < 1$ negativ und $u(p)$ ist für jedes p mit $0 < p < 1$ positiv.

Betrachte also $u(p)$ und $v(p)$ getrennt voneinander:

$u(p) = -30 \cdot p$: Da $0 < p < 1$ gilt, besitzt diese diese Funktion für $0 < p < 1$ nur negative Funktionswerte.

$v(p) = (p-1)^4$: Da für jedes $0 < p < 1$
$(p-1)^4 > 0$
gilt, besitzt diese Funktion für $0 < p < 1$ nur Funktionswerte echt größer Null. Da für f' somit $f'(p) < 0$ für $0 < p < 1$ erfüllt ist, gilt, hast du gezeigt, dass f streng monoton fallend ist.

f) ▶ **Bestimmen, wie viele Lampen mindestens bestellt werden müssen** (5P)

Zur richtigen Ausleuchtung des Studios, in welchem die 3D-Aufnahmen gedreht werden, benötigt der Sender 400 neue und einwandfreie Halogenlampen. Von diesen Halogenlampen sind erfahrungsgemäß 2 % der jeweils gelieferten Lampen schadhaft.
Deine Aufgabe ist es, die Anzahl der Lampen zu bestimmen, die mindestens bestellt werden müssen, sodass mit mindestens 99 % Wahrscheinlichkeit mindestens 400 einwandfreie Halogenlampen in der Lieferung vorhanden sind.

Betrachtet wird hierzu die Zufallsgröße Y, welche die Anzahl der einwandfreien Lampen beschreibt. Zufallsgröße Y kann als binomialverteilt angesehen werden, da diese nur 2 Ausprägungen besitzt:

- „Lampe ist schadhaft" oder
- „Lampe ist einwandfrei"

und aufgrund der konstanten Wahrscheinlichkeit für einwandfreie Lampen ($p = 1 - 0{,}02 = 0{,}98$) davon ausgegangen werden kann, dass es sich hier näherungsweise um ein Ziehen mit Zurücklegen handelt. Y ist also binomialverteilt mit $p = 0{,}98$ und n unbekannt. Dieses n sollst du nun so bestimmen, dass die Wahrscheinlichkeit für mindestens 400 einwandfreie Lampen mindestens 99 % ist. Verwende dazu das zugehörige Gegenereignis.

$P(Y \geq 400) \geq 0{,}99$

Das Gegenereignis, zu mindestens 400 einwandfreien Lampen ist:

- „Weniger als 400 Lampen sind einwandfrei".

Aufgrund des großen Stichprobenumfangs (es muss mindestens $n \geq 400$ gelten) ist hier eine Näherung durch die Normalverteilung hier möglich. Zum Lösen dieser Aufgabe, kannst du also so vorgehen:

- Berechne zunächst den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ der binomialverteilten Zufallsgröße Y und begründe, wann diese durch die Normalverteilung angenähert werden darf (Achtung: n unbekannt!).
- Definiere eine normalverteilte Zufallsgröße mit μ und σ und forme die Ungleichung $P(Y \geq 400) \geq 0{,}99$ mit dieser um.
- Löse die Ungleichung im Calculator-Modus deines CAS mit dem `solve`-Befehl,

1. Schritt: Erwartungswert und Standardabweichung berechnen und begründen

Wendest du zunächst das oben beschriebene Gegenereignis auf die Ungleichung an, so ergibt sich:

$P(Y \geq 400) = 1 - P(Y < 400) = 1 - P(Y \leq 399) \geq 0{,}99.$

Erwartungswert μ von Y in Abhängigkeit von n:

$\mu = n \cdot p = n \cdot 0{,}98.$

Standardabweichung σ in Abhängigkeit von n:

$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{n \cdot 0{,}98 \cdot (0{,}02)} = \sqrt{n \cdot 0{,}0196}.$

Damit eine Annäherung der Binomialverteilung durch die Normalverteilung zulässig ist, muss $\sigma > 3$ gelten. Diese Bedingung musst du als Nebenbedingung bei deiner weiteren Rechnung beachten. Überprüfe sie, nachdem du das gesuchte n bestimmt hast.

2. Schritt: Definieren der normalverteilten Zufallsgröße und Umformen

Die Zufallsgröße Y kann durch eine normalverteilte Zufallsgröße mit $\mu = n \cdot 0,98$ und $\sigma = \sqrt{n \cdot 0,0196} > 3$ angenähert werden, es gilt also:

$$P(Y \leq k) = \Phi\left(\frac{k-\mu+0,5}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{k-n\cdot 0,98+0,5}{\sqrt{n\cdot 0,0196}}\right).$$

Eingesetzt in die obige Ungleichung ergibt sich:

$$1 - P(Y \leq 399) \geq 0,99 \Leftrightarrow 1 - \Phi\left(\frac{399-n\cdot 0,98+0,5}{\sqrt{n\cdot 0,0196}}\right) \geq 0,99.$$

3. Schritt: Auflösen der Ungleichung nach *n*

Nach dem obigen Umformen der Ungleichung, lässt sich diese weiter vereinfachen. Substituiere dazu:

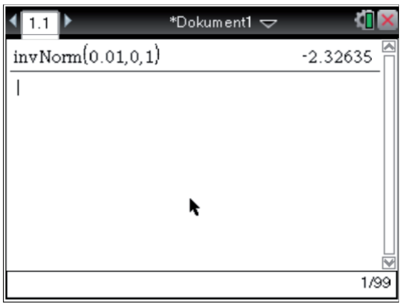
$$z = \frac{399,5-n\cdot 0,98}{\sqrt{n\cdot 0,0196}}.$$

Damit ergibt sich die Ungleichung wie folgt:

$$1 - \Phi(z) \geq 0,99 \Leftrightarrow -\Phi(z) \geq -0,01 \Leftrightarrow \Phi(z) \leq 0,01.$$

Um die Ungleichung nun weiter vereinfachen zu können, verwendest du den `invNorm`-Befehl deines CAS. Dieser Befehl gibt dir zu einer bestimmten Wahrscheinlichkeit die Stelle der Standardnormalverteilung zurück. Wende diesen Befehl wie unten an, um die Ungleichung weiter vereinfachen zu können:

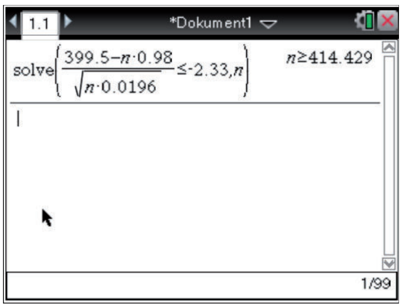
`invNorm(0.01,0,1)`.



Mit dem CAS und durch die Resubstitution von z ergibt sich:

$$z \leq -2,33 \Leftrightarrow \frac{399,5-n\cdot 0,98}{\sqrt{n\cdot 0,0196}} \leq -2,33.$$

Diese Ungleichung gilt es nun nach n aufzulösen. Verwende dazu den `solve`-Befehl im Calculator-Modus deines CAS und gehe beim Lösen der Ungleichung vor wie im Aufgabenteil d). Hast du die Ungleichung richtig in den Calculator-Modus übertragen, dann sollte diese und das zugehörige Ergebnis wie im Schaubild rechts aussehen.



Mit dem CAS ergibt sich also: $n \geq 414,43$.

Überprüfe nun mit $n = 415$ die LaPlace-Bedingung ($\sigma > 3$, siehe oben):

$$\sigma = \sqrt{n \cdot 0,98 \cdot (0,02)} = \sqrt{415 \cdot 0,0196} = 2,85 < 3.$$

Da die LaPlace-Bedingung für $n = 415$ nicht erfüllt ist, muss hier für $n = 415$ überprüft werden, ob für dieses n die geforderte Bedingung

$$P(X \geq 400) \geq 0,99$$

erfüllt ist. Mit deinem CAS erhältst du dabei für $n = 415$:

$$P(X \geq 400) = 0,98945 < 0,99.$$

Da ein Stichprobenumfang von $n = 415$ offensichtlich die geforderte Bedingung nicht erfüllt, muss dieser so lange erhöht werden, bis er die Ungleichung von oben erfüllt.

Für $n = 416$ ergibt sich: $P(X \geq 400) = 0,99505 > 0,99$.

$\Longrightarrow$ Es müssen mindestens 416 Lampen bestellt werden.