a) (1) ► **Berechnen der Wahrscheinlichkeit für Ereignis D** (8P)

Deine Aufgabe ist es hier, die Wahrscheinlichkeit für Ereignis D, mit:

D : „Unter 19 zufällig ausgewählten Bundesbürgern befindet sich mehr als eine Person, die die Blutgruppe B mit positivem Rhesusfaktor besitzt.“

zu berechnen. Der Tabelle der Aufgabenstellung kannst du entnehmen, dass insgesamt 9 % der gesamten Bevölkerung Deutschlands die Blutgruppe B mit positivem Rhesusfaktor besitzt. Man kann also sagen, die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Bundesbürger die Blutgruppe B mit Rh$^+$ besitzt, liegt bei 9 %. Zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit für Ereignis D führen wir hier Zufallsgröße X ein, welche die Anzahl der Bürger mit Blutgruppe B Rh$^+$ repräsentiert.
Zufallsgröße X kann als binomialverteilt angenommen werden, da diese nur die folgenden zwei Ausprägungen

- „Ein Bundesbürger hat die Blutgruppe B Rh$^+$“ oder
- „Ein Bundesbürger hat die Blutgruppe B Rh$^+$ nicht“

besitzt und da wegen der konstant bleibenden Wahrscheinlichkeit für B Rh$^+$ mit $p = 0,09$ näherungsweise von einem Ziehen mit Zurücklegen ausgegangen werden kann. Der Stichprobenumfang n beträgt hier $n = 19$, was bedeutet, dass X mit $p = 0,09$ und $n = 19$ binomialverteilt ist.

Berechnen der Wahrscheinlichkeit $P(D)$ für Ereignis D

Soll sich unter den 19 zufällig ausgesuchten Personen mehr als eine Person mit der Blutgruppe B Rh$^+$ befinden, so ist die Wahrscheinlichkeit $P(X > 1)$ gesucht. Um diese mit der Formel zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten binomialverteilter Zufallsgrößen berechnen zu können, musst du das zugehörige Gegenereignis bilden. Das Gegenereignis zu „...befindet sich **mehr als eine** Person,...“ ist „...befindet sich **eine oder keine** Person,...“, es gilt also:

$P(D) = P(X \geq 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1))$.

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit berechnest du nun wie folgt:

$$\begin{aligned} P(D) \;=\; P(X \geq 1) &= 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) \\ &= 1 - \left(\binom{19}{0} \cdot 0,09^0 \cdot (1 - 0,09)^{19-0} + \binom{19}{1} \cdot 0,09^1 \cdot (1 - 0,09)^{19-1}\right) \\ &= 1 - \left(1 \cdot 1 \cdot 0,91^{19} + 19 \cdot 0,09 \cdot 0,91^{18}\right) \\ &= 1 - (0,1666 + 0,3131) \;\approx\; 0,5202 \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ Die Wahrscheinlichkeit, dass sich unter 19 zufällig ausgewählten Personen mehr als eine Person mit Blutgruppe B Rh$^+$ befindet, ist $P(X > 1) = 0,5202$ bzw. 52,02 %.

(2) ► **Berechnen der Wahrscheinlichkeit für Ereignis E**

Nun sollst du die Wahrscheinlichkeit für Ereignis E, mit:

E : „Unter 100 zufällig ausgewählten Bundesbürgern befinden sich mindestens 6 und weniger als 12 Personen mit Blutgruppe AB.“,

berechnen. Der Tabelle zur Aufgabenstellung kannst du dabei entnehmen, dass insgesamt 5 % aller Bundesbürger die Blutgruppe AB besitzen, man kann also sagen, die Wahrscheinlichkeit, dass ein Bundesbürger die Blutgruppe AB besitzt, liegt bei 5 %. Um die Wahrscheinlichkeit für Ereignis E zu berechnen, führen wir Zufallsgröße Y ein.

Y beschreibt dabei die Anzahl der Bundesbürger mit der Blutgruppe AB und kann als binomialverteilt angenommen werden, da Y nur diese zwei Ausprägungen besitzt:

- „Ein Bundesbürger hat die Blutgruppe AB“ oder
- „Ein Bundesbürger hat die Blutgruppe AB nicht“

und da wegen der konstant bleibenden Wahrscheinlichkeit für Blutgruppe AB mit $p = 0,05$ näherungsweise von einem Ziehen mit Zurücklegen ausgegangen werden kann. Der Stichprobenumfang n beträgt hier $n = 100$, was bedeutet, dass Y mit $p = 0,05$ und $n = 100$ binomialverteilt ist. Nun sollst du die Wahrscheinlichkeit dafür berechnen, dass mindestens 6 und weniger als 12 der 100 zufällig ausgewählten Personen die Blutgruppe AB besitzen. Das heißt, berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Y Werte größer gleich 6 und echt kleiner 12 annimmt.

Berechnen der Wahrscheinlichkeit $P(E)$ für Ereignis E

Zu berechnen ist hier diese Wahrscheinlichkeit:

$P(E) = P(6 \leq Y < 12) = P(6 \leq Y \leq 11)$.

Diese Wahrscheinlichkeit kannst du mit einer Tabelle zur summierten Binomialverteilung berechnen. Betrachte dazu die Tabelle für $p = 0,05$ und $n = 100$. Bevor du aber die entsprechenden Werte der Tabelle entnehmen kannst, solltest du die oben stehende Wahrscheinlichkeit noch so umformen:

$P(E) = P(6 \leq Y \leq 11) = P(Y \leq 11) - P(Y < 6) = F_{100;0,05}(11) - F_{100;0,05}(5)$.

F beschreibt die Funktion der summierten Binomialverteilung für $p = 0,05$ und $n = 100$ und mit $F_{100;0,05}(11) = 0,9957$ und $F_{100;0,05}(5) = 0,6160$ ergibt sich:

$P(E) = 0,9957 - 0,6160 = 0,3797$.

$\Longrightarrow$ Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens 6 und weniger als 12 unter 100 zufällig ausgewählten Personen die Blutgruppe AB besitzen, liegt bei $P(E) = 0,3797$ bzw. 37,97 %.

b) (1) ► **Berechnen der Wahrscheinlichkeit für Ereignis *F*** (7P)

Betrachtet wird nun die Situation eines Blutspendetermins, bei welchem 6 Blutspender zufällig ausgewählt werden. Deine Aufgabe ist es hierbei, zunächst die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis F, mit:

F : „...der erste Spender die Blutgruppe B, der dritte, vierte und sechste Spender die Blutgruppe A und die übrigen Spender die Blutgruppe AB oder 0 besitzen."

zu berechnen. Diese Situation kannst du mit der Situation des Ziehens aus einer Urne vergleichen, bei welcher nacheinander sechs Kugeln aus einer Urne gezogen werden. Hier soll nun die Wahrscheinlichkeit für eine festgelegte Reihenfolge von Ereignissen berechnet werden.

Diese Reihenfolge sieht dabei so aus:

1. Blutspender: Blutgruppe B mit Wahrscheinlichkeit $P(\mathrm{B}) = 0,11$.
2. Blutspender: Blutgruppe AB oder 0 mit Wahrscheinlichkeit
   $P(\mathrm{AB} \cup 0) = 0,05 + 0,41 = 0,46$.
3. Blutspender: Blutgruppe A mit Wahrscheinlichkeit $P(\mathrm{A}) = 0,43$.
4. Blutspender: Blutgruppe A mit Wahrscheinlichkeit $P(\mathrm{A}) = 0,43$.
5. Blutspender: Blutgruppe AB oder 0 mit Wahrscheinlichkeit $P(\mathrm{AB} \cup 0) = 0,46$.
6. Blutspender: Blutgruppe A mit Wahrscheinlichkeit $P(\mathrm{A}) = 0,43$.

Da hier eine festgelegte Reihenfolge von Ereignissen betrachtet wird, berechnet sich die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis F gemäß der Pfadmultiplikation über das Produkt der oben angeführten Wahrscheinlichkeiten:

$$\begin{aligned} P(F) &= P(\mathrm{B}) \cdot P(\mathrm{AB} \cup 0) \cdot P(\mathrm{A}) \cdot P(\mathrm{A}) \cdot P(\mathrm{AB} \cup 0) \cdot P(\mathrm{A}) \\ &= P(\mathrm{B}) \cdot P(\mathrm{AB} \cup 0)^2 \cdot P(\mathrm{A})^3 \\ &= 0,11 \cdot 0,46^2 \cdot 0,43^3 \ = \ 0,00185 \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ Die Wahrscheinlichkeit für Ereignis F ist also $P(F) = 0,00185$ bzw. 0,185 %.

(2) ► **Berechnen der Wahrscheinlichkeit für Ereignis *G***

Betrachtet wird weiterhin die Situation des Blutspendetermins, bei welchem 6 Blutspender zufällig ausgewählt werden. Deine Aufgabe ist es nun, die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis G mit:

G : „...einer mit der Blutgruppe B, drei mit der Blutgruppe A und der Rest mit der Blutgruppe AB oder 0 sind."

zu berechnen. Unter den 6 zufällig ausgewählten Spendern sollen sich also, ohne Berücksichtigung der Reihenfolge,

- ein Spender mit der Blutgruppe B ($P(\mathrm{B}) = 0,11$),
- drei Spender mit der Blutgruppe A ($P(\mathrm{A}) = 0,43$) und
- zwei Spender mit der Blutgruppe AB oder 0 ($P(\mathrm{AB} \cup 0) = 0,46$)

befinden.

Da hier die Reihenfolge, mit welcher die Spender mit den einzelnen Merkmalen auftreten sollen, nicht berücksichtigt wird, müssen hier zusätzlich zu den Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse, die Anordnungsmöglichkeiten der Ereignisse unter den 6 Spendern beachtet werden.

Der Spender mit der Blutgruppe B könnte der erste, zweite, dritte, vierte, fünfte oder sechste Spender sein, welcher untersucht wird. Das heißt, es gibt insgesamt 6 Anordnungsmöglichkeiten, diesen Spender in der Stichprobe unterzubringen.

B					

Wurde diesem Spender ein „Platz" in der Stichprobe zugewiesen, so reduziert sich die Anzahl der „Plätze" in der Stichprobe auf 5. Die drei Spender mit der Blutgruppe A haben folglich noch die Möglichkeit, sich auf den 5 verbleibenden „Plätzen" in der Stichprobe anzuordnen, die Anzahl der Möglichkeiten kannst du hier mit dem Binomialkoeffizient ausrechnen.

B	A	A	A		

Für die verbliebenen zwei Spender mit der Blutgruppe AB oder 0, gibt es folglich nur noch eine Anordnungsmöglichkeit.

B	A	A	A	AB oder 0	AB oder 0

Die Wahrscheinlichkeit berechnet sich also so:

$$\begin{aligned} P(G) &= 6 \cdot P(\mathrm{B}) \cdot \binom{5}{3} \cdot P(\mathrm{A})^3 \cdot P(\mathrm{AB} \cup 0)^2 \\ &= 6 \cdot 0{,}11 \cdot \binom{5}{3} \cdot 0{,}43^3 \cdot 0{,}46^2 \\ &= 0{,}111 \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$Ereignis G tritt mit einer Wahrscheinlichkeit von $P(G) = 0{,}111$ bzw. 11,1 % ein.

c) **▶ Berechnen, wie groß p mindestens sein müsste** (4P)

Nun soll die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Bürger eines deutschen Bundeslandes Rh^- ist, p mit $0 < p < 1$ sein. Deine Aufgabe ist es, zu berechnen, wie groß dieses p **mindestens** sein müsste, damit sich mit einer Wahrscheinlichkeit von **wenigstens** 80 % unter zehn zufällig ausgewählten Bürger dieses Bundeslandes mindestens eine Person mit Rh^- befindet.

Um diese Aufgabe zu lösen, betrachtest du Zufallsgröße Z, welche die Anzahl der Personen mit negativem Rhesusfaktor repräsentiert. Z kann als binomialverteilt angenommen werden, da diese nur die zwei Ausprägungen

- „Eine Person hat einen negativen Rhesusfaktor" oder
- „Eine Person hat keinen negativen Rhesusfaktor"

kennt und da aufgrund der konstanten Wahrscheinlichkeit p, mit welcher eine Person einen negativen Rhesusfaktor (Rh^-) besitzt, näherungsweise von einem Ziehen mit Zurücklegen ausgegangen werden kann. Da eine Stichprobe mit 10 zufällig ausgewählten Bürgern des entsprechenden Bundeslandes betrachtet wird, ist Z binomialverteilt mit **unbekanntem p** und $\boldsymbol{n = 10}$.

p soll nun so angepasst werden, dass die Wahrscheinlichkeit, unter 10 zufällig ausgewählten Personen eine Person mit Rh^- zu finden, wenigstens 80 % beträgt. Das heißt, folgender Zusammenhang muss für das unbekannte p erfüllt sein:

$P(Z \geq 1) \geq 0,8.$

Berechnen des gesuchten *p*

Um p mit dem oben aufgestellten Ansatz berechnen zu können, musst du hier das zu $P(Z \geq 1)$ zugehörige Gegenereignis betrachten. Das Gegenereignis zu „...**mindestens** einer Person mit Rh^-..." ist „...**keine** Person mit Rh^-...":

$P(Z \geq 1) \geq 0,8 \;\Leftrightarrow\; 1 - P(Z < 1) \geq 0,8 \;\Leftrightarrow\; -P(Z = 0) \geq -0,8 \;\Leftrightarrow\; P(Z = 0) \leq 0,2.$

Verwende nun die Formel zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten einer binomialverteilten Zufallsgröße, um die Ungleichung zu lösen und p zu bestimmen:

$$\begin{array}{lll}
P(Z=0) & \leq 0,2 & p \text{ unbekannt und } n = 10 \\
\binom{10}{0} \cdot p^0 \cdot (1-p)^{10-0} & \leq 0,2 & \binom{10}{0} = 1 \\
1 \cdot 1 \cdot (1-p)^{10} & \leq 0,2 & \\
(1-p)^{10} & \leq 0,2 & \mid \sqrt[10]{\ } \\
1-p & \leq \sqrt[10]{0,2} & \mid -1 \\
-p & \leq 0,8513 - 1 & \mid : (-1) \\
p & \geq 0,1487 &
\end{array}$$

$\Longrightarrow$ p müsste mindestens 0,1487 bzw. 14,87 % sein.

d) (1) ► **Berechnen der Wahrscheinlichkeit, mit welcher ein Bundesbürger Blutspender ist** (7P)

Der Aufgabenstellung zu dieser Aufgabe kannst du entnehmen, dass 3,9 % der Bundesbürger mit Blutgruppe 0 und 2,4 % der Bundesbürger mit anderen Blutgruppen, Blutspender sind. Deine Aufgabe ist es nun, die Wahrscheinlichkeit dafür zu berechnen, dass ein rein zufällig ausgewählter Bundesbürger ein Blutspender ist.

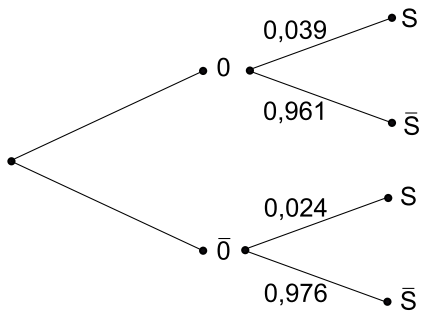
Bei dieser Aufgabe wird nur zwischen Bundesbürgern unterschieden, die entweder Blutgruppe 0 haben oder nicht. Dabei handelt es sich bei dem Anteil der blutspendenden Bundesbürger mit Blutgruppe 0 (3,9 %) um eine bedingte Wahrscheinlichkeit:

- Wahrscheinlichkeit, dass ein Bundesbürger Spender ist (S), unter der Bedingung, dass dieser die Blutgruppe 0 besitzt: $P_0(S) = 0,039$.

Auf der Gegenseite, lässt sich auch der Anteil der Bürger, die nicht die Blutgruppe 0 besitzen, aber dennoch Blutspender (S) sind (2,4 %), ebenfalls durch eine bedingte Wahrscheinlichkeit repräsentieren:

- Wahrscheinlichkeit, dass ein Bundesbürger Spender ist (S), unter der Bedingung, dass dieser nicht die Blutgruppe 0 besitzt: $P_{\overline{0}}(S) = 0,024$.

Der oben beschriebene Sachverhalt lässt sich auf der Grundlage der getroffenen Annahmen durch ein zweistufiges Zufallsexperiment beschreiben. Auf der ersten Stufe wird dabei unterschieden, ob ein Bundesbürger die Blutgruppe 0 hat oder nicht. Auf der zweiten Stufe wird dann unterschieden, ob der Bundesbürger, unter der Bedingung der Vorgängerstufe, Spender ist oder nicht. Dieser Sachverhalt lässt sich durch folgendes Baumdiagramm visualisieren:



Um nun die Wahrscheinlichkeit zu berechnen, mit welcher ein Bundesbürger Blutspender ist, berechnest du zunächst die Wahrscheinlichkeiten der ersten Stufe des Zufallsexperiments. Anschließend berechnest du über die Pfadregeln die gesuchte Wahrscheinlichkeit $P(S)$.

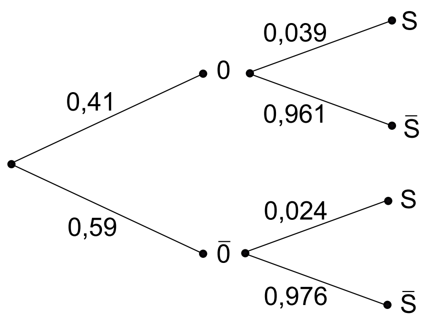
1. Schritt: Bestimmen der Wahrscheinlichkeiten der ersten Stufe des Zufallexperiments

Auf der ersten Stufe des Zufallexperiments wird zwischen Blutgruppe 0 und Nicht-Blutgruppe 0 ($\overline{0}$) unterschieden. Der Tabelle der Aufgabenstellung kannst du entnehmen, dass ein Bundesbürger mit einer Wahrscheinlichkeit von $P(0) = 0,41$ bzw. 41 % die Blutgruppe 0 angehört.

Das heißt, die Wahrscheinlichkeit, dass ein Bundesbürger nicht die Blutgruppe 0 hat, ist:

$P(\overline{0}) = 1 - P(0) = 1 - 0,41 = 0,59.$

Vollständiges Baumdiagramm:



2. Schritt: Berechnen der Wahrscheinlichkeit $P(S)$

Um nun die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis S („Bundesbürger spendet Blut“) zu berechnen, betrachtest du jene Pfade im obigen Baumdiagramm die zum Ereignis S führen. Über die entsprechenden Pfadregeln berechnest du dann die gesuchte Wahrscheinlichkeit $P(S)$:

$P(S) = P(0) \cdot P_0(S) + P(\overline{0}) \cdot P_{\overline{0}}(S) = 0,41 \cdot 0,039 + 0,59 \cdot 0,024 \approx 0,030$

$\Longrightarrow$ Mit einer Wahrscheinlichkeit von $P(S) \approx 0,030$ bzw. von ungefähr 3 % spendet ein Bundesbürger Blut.

(2) ▶ **Ermitteln der Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Blutspender Blutgruppe 0 besitzt**

Der Aufgabenstellung kannst du nun weiterhin entnehmen, dass ein Blutspender gerade Blut gespendet hat. Du sollst dabei die Wahrscheinlichkeit dafür berechnen, dass eben dieser Blutspender die Blutgruppe 0 besitzt. Anders formuliert: Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Person die Blutgruppe 0 besitzt, **unter der Bedingung**, dass diese Blutspender ist.

Hier handelt es sich also um eine **bedingte Wahrscheinlichkeit**, wobei die Bedingung durch Ereignis S (Person ist Blutspender) gegeben ist. In Formel lautet sie: $P_S(0)$.

Rechne weiter über die Formel zur bedingten Wahrscheinlichkeit (Satz von Bayes). Die benötigten Wahrscheinlichkeiten kannst du deinem im ersten Aufgabenteil dieser Teilaufgabe erstelltem Baumdiagramm entnehmen.

$$P_S(0) = \frac{P(S\cap 0)}{P(S)}$$

Mit $P(S) = 0{,}030$ (siehe oben) und $P(S\cap 0)$:
$P(S\cap 0) = P(0\cap S) = P(0)\cdot P_0(S) = 0{,}41\cdot 0{,}039 = 0{,}016.$

$$\begin{aligned} P_S(0) &= \frac{P(0\cap S)}{P(S)} \\ &= \frac{0{,}016}{0{,}030} \\ &= 0{,}533 \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person die Blutgruppe 0 besitzt, unter der Bedingung, dass diese Blutspender ist, ist $P_0(S) = 0{,}533$ bzw. 53,3 %.

e) ▶ **Ermitteln des kleinstmöglichen Intervalls I** (4P)

Der Aufgabenstellung kannst du entnehmen, dass nur 3 % der Bundesbürger im Alter von 18 bis 68 Jahren Blutspender sind. Außerdem wurde in einer repräsentativ ausgewählten Gruppe von 1.500 Bundesbürgern die Anzahl der Blutspender ermittelt. Deine Aufgabe ist es nun zu ermitteln, in welchem kleinstmöglichen zum Erwartungswert symmetrischen Intervall I mit $I = [\mu - a; \mu + a]$ und $a \in \mathbb{R}$, $a < \mu$, die Anzahl der Blutspender mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % liegt.

Betrachtet wird auch hier wieder das Ereignis S mit S : „Der Bundesbürger ist Blutspender“. Sei W eine Zufallsgröße, welche die Anzahl der Blutspendern in der Stichprobe repräsentiert, so kann W als binomialverteilte Zufallsgröße angesehen werden, da diese mit

- S : „Der Bundesbürger ist Blutspender“ oder
- $\overline{S}$: „Der Bundesbürger ist kein Blutspender“

nur zwei Merkmalsausprägungen besitzt und da aufgrund der konstanten Wahrscheinlichkeit, mit welcher ein Bundesbürger ein Blutspender ist ($p = 0{,}03$), näherungsweise von einem Ziehen **mit** Zurücklegen ausgegangen werden kann. Da im Zufallsexperiment insgesamt 1500 Bundesbürger untersucht wurden, ist W binomialverteilt mit $p = 0{,}03$ und $n = 1.500$.

Aufgrund des großem Stichprobenumfangs ($n = 1.500$), musst du hier die Zufallsgröße W durch eine normalverteilte Zufallsgröße annähern. Gehe dabei so vor:

- Berechne zunächst den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ der binomialverteilten Zufallsgrößen W und begründe, warum diese durch die Normalverteilung angenähert werden darf.
- Definiere eine normalverteilte Zufallsgröße mit μ und σ.

Im symmetrischen Intervall um den Erwartungswert μ soll mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 % die Anzahl W der Blutspender liegen. Das heißt, die Wahrscheinlichkeit, dass W im Intervall I mit $I = [\mu - a; \mu + a]$ und $a \in \mathbb{R}$, $a < \mu$ soll größer gleich 90 % bzw. 0,9 sein:

$P(W \in [\mu - a; \mu + a]) \geq 0{,}9 \;\Leftrightarrow\; P(\mu - a \leq W \leq \mu + a) \geq 0{,}9.$

Um diese Ungleichung nun nach a auflösen und damit I vollständig bestimmen zu können, gehst du so vor:

- Forme diesen Term mithilfe der Φ-Funktion um.
- Löse den Term nach a auf. Verwende hierzu eine Tabelle zur Standardnormalverteilung.
- Bestimme das Intervall.

1. Schritt: Annähern von W durch eine normalverteilte Zufallsgröße

Erwartungswert μ von W: $\mu = n \cdot p = 1.500 \cdot 0,03 = 45$.

Standardabweichung σ von W: $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{1.500 \cdot 0,03 \cdot (1-0,03)} = 6,61$.

Da $\sigma = 6,61$ echt größer 3 ist, also $\sigma > 3$ gilt, darf Zufallsgröße W durch eine normalverteilte Zufallsgröße angenähert werden. Für ein beliebiges ganzzahliges k gilt dann:

$P(W \leq k) = \Phi\left(\frac{k-\mu+0,5}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{k-44,5}{6,61}\right)$.

2. Schritt: Umformen bzw. Auflösen des Terms nach a

$$\begin{array}{lll}
P(\mu - a \leq W \leq \mu + a) & \geq 0,90 & \text{Aufteilen (Obere Intervallsgrenze – untere Intervallsgrenze)} \\
P(W \leq \mu + a) - P(W \leq \mu - a - 1) & \geq 0,90 & \text{Stetigkeitskorrektur!} \\
\Phi\left(\frac{\mu+a-k}{6,61}\right) - \Phi\left(\frac{\mu-a-1-k}{6,61}\right) & \geq 0,90 & \\
\Phi\left(\frac{\mu+a-44,5}{6,61}\right) - \Phi\left(\frac{\mu-a-1-44,5}{6,61}\right) & \geq 0,90 & \\
\Phi\left(\frac{0,5+a}{6,61}\right) - \Phi\left(\frac{-0,5-a}{6,61}\right) & \geq 0,90 & \text{Beachte: } \Phi(-z) = 1 - \Phi(z) \\
\Phi\left(\frac{0,5+a}{6,61}\right) - \left(1 - \Phi\left(\frac{0,5+a}{6,61}\right)\right) & \geq 0,90 & \\
\Phi\left(\frac{0,5+a}{6,61}\right) + \Phi\left(\frac{0,5+a}{6,61}\right) - 1 & \geq 0,90 & \\
2 \cdot \Phi\left(\frac{0,5+a}{6,61}\right) - 1 & \geq 0,90 & \mid +1 \\
2 \cdot \Phi\left(\frac{0,5+a}{6,61}\right) & \geq 1,9 & \mid : 2 \\
\Phi\left(\frac{0,5+a}{6,61}\right) & \geq 0,95 &
\end{array}$$

Um die Ungleichung nun weiter vereinfachen zu können, benötigst du eine Tabelle zur Standardnormalverteilung. Dieser Tabelle entnimmst du den Wert, an welchem die Φ-Funktion erstmals den Wert 0,95 überschreitet und formst damit die obige Ungleichung so um:

$$\begin{array}{lll}
\Phi\left(\frac{0,5+a}{6,61}\right) & \geq 0,95 & \text{Mit } \Phi(1,65) \approx 0,9505 \\
\frac{0,5+a}{6,61} & \geq 1,65 & \mid \cdot 6,61 \\
0,5 + a & \geq 10,9 & \mid -0,5 \\
a & \geq 10,4 &
\end{array}$$

$\Longrightarrow$ Es muss also $a \geq 10,4$ gelten. Da für a nur ganzzahlige Werte in Frage kommen, ist das kleinstmöglich zu wählende a: $a_{min} = 11$.

Das kleinstmögliche Intervall I ergibt sich also zu: $I = [45-11; 45+11] = [34; 56]$.