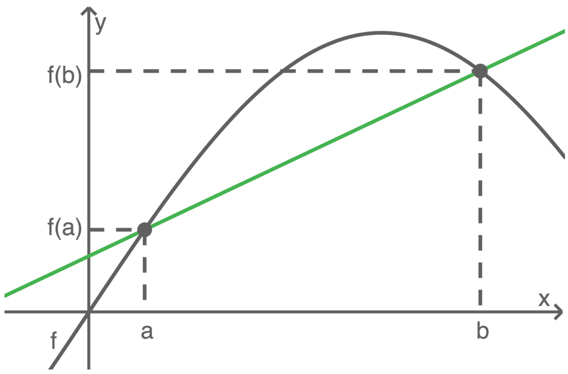
Änderungsrate

Die Änderungsrate einer Messgröße, wie zum Beispiel die zurückgelegte Strecke eines Autos, beschreibt, wie schnell sich diese Größe verändert, also wie schnell sie zu- oder abnimmt. Im Falle des Autos geht es dabei also um die Geschwindigkeit, mit der es sich fortbewegt.
In der Differenzialrechnung gibt es zwei verschiedene Änderungsraten: die mittlere Änderungsrate, auch durchschnittliche Änderungsrate genannt, und die momentane Änderungsrate, auch lokale Änderungsrate genannt. Beide Arten treten häufig in der Differenzialrechnung auf und sind auch in der Anwendung immer wieder interessant. Im Folgenden werden die beiden verschiedenen Änderungsraten erläutert und miteinander verglichen.

Mittlere Änderungsrate Definition

Die mittlere Änderungsrate wird auch durchschnittliche Änderungsrate genannt, da sie die durchschnittliche Änderung einer Größe in einem bestimmten Intervall angibt. Im Beispiel von einem fahrenden Auto entspricht die mittlere Änderung also der durchschnittlichen Geschwindigkeit des Autos auf einer bestimmten Strecke.

An einem Graphen sieht dies wie folgt aus:
Gegeben sind ein Graph G und ein Intervall $[a;b]$. Wird nun eine Gerade durch die beiden Punkte $(a \mid f(a))$ und $(b \mid f(b))$ gelegt, so ist dies eine Sekante von G. Die Steigung dieser Sekanten gibt die durchschnittliche Steigung im Intervall $[a;b]$ an.



Mittlere Änderungsrate berechnen

Möchte man die durchschnittliche Änderungsrate berechnen, so wird der Differenzenquotient benötigt. Dieser beschreibt die Steigung m der Sekante durch zwei gegebene Punkte $(a \mid f(a))$ und $(b \mid f(b))$.

Mittlere Änderungsrate Formel (Durchschnittliche Änderungsrate Formel):

$$\boxed{m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}}$$

Möchte man also die mittlere Änderungsrate im Intervall berechnen, so berechnet man den Funktionswert an den Intervallgrenzen und setzt die Koordinaten in die Formel ein.

Grafisch kann die mittlere Änderung ermittelt werden, indem die Punkte auf der Funktion an den Intervallgrenzen miteinander verbunden werden. Die so entstandene Gerade ist die Sekante, ihre Steigung entspricht also gerade der mittleren Änderung. Die Steigung kann dann aus der Grafik abgelesen werden.

Mittlere Änderungsrate Beispiel

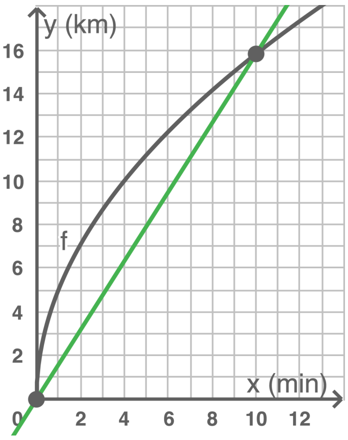
Die Geschwindigkeit eines Autos wird durch die

Funktion $f(x) = 5\sqrt{x}$ beschrieben. Dabei gibt x die Zeit in Minuten und $f(x)$ die zurückgelegte Strecke in Kilometern an. Mit welcher durchschnittlichen Geschwindigkeit fährt das Auto in den ersten zehn Minuten?

Es gilt $f(0) = 0$ und $f(10) \approx 15,8.$ Mit der Formel für die durchschnittliche Geschwindigkeit folgt:

$$\frac{15,8\,\text{km} - 0\,\text{km}}{10\,\text{min} - 0\,\text{min}} \approx 1,58\frac{\text{km}}{\text{min}} = 94,8\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

In den ersten zehn Minuten fährt das Auto mit einer durchschnittlichen Geschwindigkeit von ungefähr $94,8\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

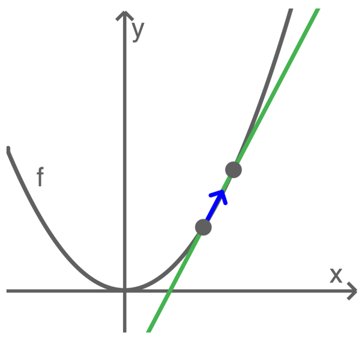


Skizze

Momentane Änderungsrate Definition

Die momentane Änderungsrate beschreibt die auf einen Moment bezogene Änderung einer Messgröße. In dem Beispiel mit dem fahrenden Auto entspricht dies also der aktuellen Geschwindigkeit des Autos, die gerade auf dem Tacho angezeigt wird.

Die momentane Änderung ist der Grenzwert der mittleren Änderung. In der Vorstellung kommen sich die beiden Intervallgrenzen von der mittleren Änderung immer näher. So wird aus der Sekante irgendwann nahezu eine Tangente, da die beiden Punkte dann so nahe beieinander sind, dass sie fast identisch sind. Das Intervall wird also so klein, dass nur noch die Änderungsrate an einer Stelle, also die momentane Änderung berechnet wird.



Momentane Änderungsrate berechnen

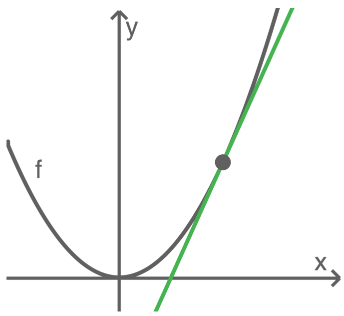
Wie oben erwähnt, ist die momentane Änderung der Grenzwert der mittleren Änderung, also der Differentialquotient. Damit folgt:

Momentane Änderungsrate Formel (Lokale Änderungsrate Formel):

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Die momentane Änderungsrate einer Funktion ist also gerade ihre Ableitung. Diese ist durch den Differentialquotienten gegeben und gibt die Steigung der Tangenten an den Graphen der

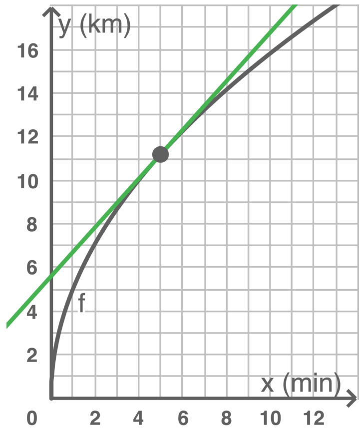
Funktion in einem Punkt an. Möchte man also die lokale Änderung berechnen, so muss man die Ableitung an der gesuchten Stelle berechnen.



Grafisch kann die momentane Änderung ermittelt werden, indem an der Stelle x_0 eine Tangente an den Graphen angelegt wird. Die Steigung dieser Tangenten entspricht gerade der lokalen Änderung an der Stelle x_0. Diese kann direkt aus dem Schaubild abgelesen werden.

Momentane Änderungsrate Beispiel

Die Geschwindigkeit eines Autos wird durch die Funktion $f(x) = 5\sqrt{x}$ beschrieben. Dabei gibt x die Zeit in Minuten und $f(x)$ die zurückgelegte Strecke in Kilometern an. Welche Geschwindigkeit zeigt der Tacho nach genau 5 Minuten?



Gesucht ist die Ableitung von f an der Stelle $x = 5$:

$$f'(x) = \frac{5}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(5) = \frac{5}{2\sqrt{5}} \approx 1{,}12\frac{\text{km}}{\text{min}} = 67{,}2\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

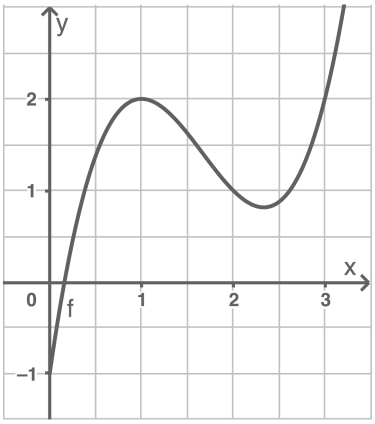
Beachte: Es wäre falsch, den Funktionswert an der Stelle $x = 5$ abzulesen. Dieser gibt nämlich nicht die Geschwindigkeit, sondern die zurückgelegte Strecke nach fünf Minuten an.

Unterschied mittlere und momentane Änderungsrate

Die mittlere und lokale Änderungsrate unterscheiden sich zusammenfassend darin, dass die mittlere Änderung die durchschnittliche Änderung in einem Intervall angibt, während die momentane Änderung die Änderung zu einem bestimmten Zeitpunkt beschreibt. Somit ist die momentane Änderung der Grenzwert der mittleren Änderung, wenn das Intervall immer kleiner gewählt wird.

Aufgaben mit Lösungen

1 Bestimme anhand der Abbildung die mittlere Änderungsrate der Funktion f im Intervall $[0;3]$ und die lokale Änderungsrate an der Stelle $x_0 = 2.$

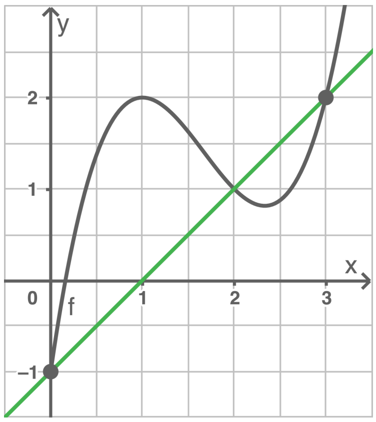


Abbildung

Lösung

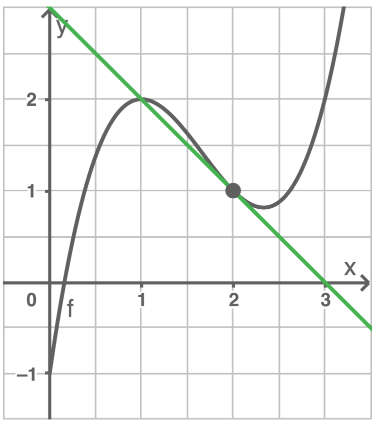
Die mittlere Änderungsrate im Intervall $[0;3]$ lässt sich wie folgt berechnen:

$$m=\frac{2-(-1)}{3-0}=\frac{3}{3}=1$$



Skizze

Die lokale Änderung an der Stelle 2 kann abgelesen werden, indem eine Tangente an den Graphen angelegt und deren Steigung bestimmt wird:



Die lokale Änderung an der Stelle $x_0=2$ beträgt $f'(2)=-1$.

2 Gegeben ist die Funktion $f(x)=0,01x^3$.

a) Berechne die mittlere Änderungsrate von f im Intervall $[3; 9]$.

b) Berechne die lokale Änderung an der Stelle $x_0 = 2$ mit dem Differentialquotienten.

Lösung

a) $f(3) = 0,01 \cdot 3^3 = 0,27$
$f(9) = 0,01 \cdot 9^3 = 7,29$

Damit ist die durchschnittliche Änderungsrate im Intervall $[3; 9]$ gegeben durch:

$$m = \frac{7,29 - 0,27}{9-3} = \frac{7,02}{6} = 1,17$$

b)
$$\begin{aligned}
f'(2) &= \lim_{x\to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{0,01 \cdot x^3 - 0,01 \cdot 2^3}{x-2} \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{0,01 \cdot x^3 - 0,08}{x-2} \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{0,01 \cdot (x^3 - 8)}{x-2} \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{0,01 \cdot (x-2)(x^2 + 2x + 4)}{x-2} \\
&= \lim_{x\to 2} 0,01 \cdot (x^2 + 2x + 4) \\
&= 0,01 \cdot (2^2 + 2 \cdot 2 + 4) \\
&= 0,12
\end{aligned}$$

3 Das Wachstum einer Pflanze kann in den ersten acht Tagen durch die Funktion $f(x) = -0,1x^2 + 2x$ beschrieben werden. Dabei gibt x die Zeit in Tagen und $f(x)$ die Größe der Pflanze in Zentimetern an.

a) Berechne, wie viele Zentimeter am Tag die Pflanze durchschnittlich zwischen dem zweiten und siebten Tag wächst. Zeichne die Funktion mit der zugehörigen Sekante in ein geeignetes Koordinatensystem.

b) Bestimme rechnerisch die momentane Änderungsrate am fünften Tag und interpretiere das Ergebnis im Sachzusammenhang.

Lösung

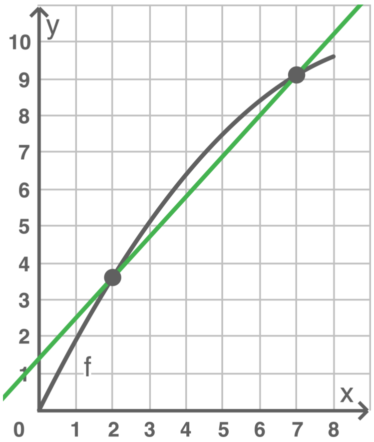
a) $f(2) = 3,6$

$f(7) = 9,1$

Damit ist die durchschnittliche Änderungsrate in den ersten drei Tagen gegeben durch:

$$m = \frac{9,1 - 3,6}{7 - 2} = \frac{5,5}{5} = 1,1$$

Die Pflanze wächst zwischen dem zweiten und siebten Tag durchschnittlich $1,1\,\text{cm}$ pro Tag.



b) $f'(x) = -0,2x + 2$

Die momentane Änderungsrate am fünften Tag ist gegeben durch:

$$f'(5) = -0,2 \cdot 5 + 2 = 1$$

Die Pflanze wächst am dritten Tag einen Zentimeter.