

a) (1) ▶ **Angeben von Geradengleichungen für die Flugbahnen der Vögel**

(11P)

Geradengleichung für die Flugbahn des Raubvogels:

Eine Geradengleichung besteht im Allgemeinen aus einem Stützvektor und einem Richtungsvektor. Gerade g für die Flugbahn des Raubvogels könnte beispielsweise den Ortsvektor $\overrightarrow{OP_0}$ als Stützvektor besitzen. Einen Richtungsvektor der Geraden g bildest du mit Hilfe der Koordinaten der Punkte P_0 und P_1 .

Geradengleichung für die Flugbahn des Singvogels:

Gerade h für die Flugbahn des Singvogels könnte den Ortsvektor $\overrightarrow{OQ_0}$ als Stützvektor besitzen. Einen Richtungsvektor der Geraden h bildest du dann mit Hilfe der Koordinaten der Punkte Q_0 und Q_1 .

(2) ▶ **Bestätigen, dass die Vögel mit den gegebenen Geschwindigkeiten fliegen**

Der Aufgabenstellung kannst du entnehmen, dass der Raubvogel mit einer Geschwindigkeit von $v_1 = 61,2 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ und der Singvogel mit einer Geschwindigkeit von $v_2 = 32,4 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ fliegt. Deine Aufgabe ist es dabei, diese Behauptungen mit denen in der Aufgabenstellung gegebenen Angaben zu bestätigen.

Aus der Aufgabenstellung sollte dir bekannt sein, dass sich der Raubvogel im Punkt $P_0 (3260 \mid -1860 \mid 830)$ und eine Sekunde später im Punkt $P_1 (3248 \mid -1848 \mid 829)$ befindet, während sich der Singvogel im Punkt $Q_0 (800 \mid -600 \mid 200)$ und eine Sekunde später im Punkt $Q_1 (796 \mid -592 \mid 201)$ befindet, wobei 1 LE einem Meter entspricht.

Willst du nun bestätigen, dass die Vögel mit den gegebenen Geschwindigkeiten v_1 und v_2 fliegen, so berechnest du zuerst, welche Strecke die Vögel innerhalb einer Sekunde zurücklegen. Hast du diese Strecken jeweils bestimmt, so ist dir bekannt, welche Strecke die Vögel innerhalb einer Sekunde zurücklegen. Mit diesen Geschwindigkeitsangaben kannst du dann auf die zurückgelegte Strecke in km pro Stunde schließen.

(3) ▶ **Zeigen, dass die Flugbahnen windschief sind und Bestimmen des Abstands**

Deine Aufgabe ist es hier zu zeigen, dass die im ersten Aufgabenteil dieser Aufgabe bestimmten Fluggeraden windschief zueinander verlaufen. Dazu weist du hier im ersten Schritt nach, dass die Richtungsvektoren der Fluggeraden linear unabhängig sind. Hast du dies nachgewiesen, so berechnest du im zweiten Schritt den Abstand der Geraden.

1. Schritt: Lineare Unabhängigkeit der Richtungsvektoren der Fluggeraden nachweisen
Beim Nachweisen der linearen Unabhängigkeit der Richtungsvektoren der Fluggeraden gibt es hier zwei Möglichkeiten, welche im Folgenden dargestellt werden:

1. Möglichkeit:

Sind die zwei Richtungsvektoren $\overrightarrow{P_0P_1}$ und $\overrightarrow{Q_0Q_1}$ der Fluggeraden linear unabhängig, so ist folgende Gleichung für kein $k \in \mathbb{R}$ erfüllt:

$$\overrightarrow{P_0P_1} = k \cdot \overrightarrow{Q_0Q_1}.$$

Setze also die Richtungsvektoren in die obige Gleichung ein und zeige so, dass die Richtungsvektoren linear unabhängig sind.

2. Möglichkeit:

Sind die Richtungsvektoren $\overrightarrow{P_0P_1}$ und $\overrightarrow{Q_0Q_1}$ der Fluggeraden linear unabhängig so ist

$$\lambda \cdot \overrightarrow{P_0P_1} + \mu \cdot \overrightarrow{Q_0Q_1} = \vec{0}$$

nur trivial, das heißt mit $\lambda = \mu = 0$, lösbar. Setze also die Richtungsvektoren $\overrightarrow{P_0P_1}$ und $\overrightarrow{Q_0Q_1}$ der Fluggeraden in das obige Gleichungssystem ein und löse das Gleichungssystem nach μ und λ .

2. Schritt: Bestimmen des Abstands zwischen beiden Geraden

Schaust du in dein Tafelwerk bzw. deine Formelsammlung, so findest du folgende Formel zur Berechnung des Abstands zwischen windschiefen Geraden:

$$d = |(\vec{u} - \vec{v}) \circ \vec{n}_0|$$

Wobei die \vec{u} und \vec{v} den Aufpunkten bzw. den Stützvektoren der Fluggeraden g und h entsprechen, es könnte also

$$\vec{u} = \overrightarrow{OQ_0} = \begin{pmatrix} 3260 \\ -1860 \\ 830 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{v} = \overrightarrow{OP_0} = \begin{pmatrix} 800 \\ -600 \\ 200 \end{pmatrix}$$

gelten. \vec{n}_0 ist hier der Normaleneinheitsvektor. Dieser Vektor besitzt eine Länge von 1 LE und steht sowohl auf dem Richtungsvektor $\overrightarrow{P_0P_1}$ der Fluggeraden g als auch auf dem Richtungsvektor $\overrightarrow{Q_0Q_1}$ der Fluggeraden h senkrecht. Bevor du also den Abstand d zwischen den Fluggeraden berechnen kannst, bestimmst du den Normaleneinheitsvektor \vec{n}_0 .

Der auf 1 normierte Normalenvektor lässt sich hier im Calculator-Modus deines CAS berechnen.

b) (1) ► Berechnen in welchem Punkt der Singvogel den Nebel verlässt

(7P)

Der Aufgabenstellung kannst du entnehmen, dass Ebene E , welche an der oberen Grenze des Frühnebels verläuft, orthogonal zu \vec{n}_E ist und durch den Punkt $A(0 \mid 0 \mid 280)$ verläuft. Deine Aufgabe ist es hier, jenen Punkt zu berechnen, an welchem der Singvogel den Frühnebel verlässt. Dieser Punkt entspricht dem Schnittpunkt S von Ebene E und Fluggerade h (siehe a).

Bevor du jedoch den Schnittpunkt S von Ebene E und Fluggeraden h bestimmen kannst, ermittelst du mit den Angaben aus der Aufgabenstellung die Ebenengleichung der Ebenen E in Koordinatenform. Hast du eine Ebenengleichung von E in Koordinatenform bestimmt, so fasst du h als Vektor in Abhängigkeit von s zusammen und setzt diesen in die Koordinatenform von E ein. Hast du anschließend den Parameterwert für s berechnet, unter welchem sich E und h schneiden, so setzt du diesen in die Geradengleichung von h ein und berechnest somit die Koordinaten des Schnittpunkts S .

(2) ► Berechnen nach welcher Zeit der Singvogel den Frühnebel verlässt

Aus der Aufgabenstellung zum Aufgabenteil a geht hervor, dass der Singvogel mit einer Geschwindigkeit von $v_S = 32,4 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ fliegt. Deine Aufgabe ist es hier, die Zeit t zu berechnen, welche der Singvogel benötigt um den Frühnebel zu verlassen. Das heißt, du berechnest die Zeit, welche der Singvogel benötigt um von Punkt $Q_0(800 \mid -600 \mid 200)$ zum Punkt $S(-400 \mid 1800 \mid 500)$ zu gelangen.

Ermittle dazu zuerst welche Strecke der Singvogel zurücklegen muss um von Q_0 zu S zu gelangen. Hast du die Länge dieser Strecke bestimmt, so ermittelst du mit Hilfe der Fluggeschwindigkeit v_S des Singvogels die Zeit, welche der Singvogel benötigt, um diese zurückzulegen.

(3) ► **Ermitteln, unter welchem Winkel α der Singvogel den Frühnebel verlässt**

Deine Aufgabe ist es hier, jenen Winkel α zu berechnen, unter welchem der Singvogel den Frühnebel verlässt. Das heißt, du berechnest den Winkel α , unter welchem sich Gerade h und Ebene E schneiden. Da von Ebene E der Normalenvektor \vec{n}_E bekannt ist, berechnest du den Winkel α , unter welchem sich E und h schneiden, über das Komplement (der Ergänzung zu 90°) des Winkels, welcher durch den Normalenvektor von E und dem Richtungsvektor von h eingeschlossen ist. Es gilt also:

$$\sin \alpha = \frac{|\vec{n}_E \circ \overrightarrow{Q_0Q_1}|}{|\vec{n}_E| \cdot |\overrightarrow{Q_0Q_1}|}$$

c) ► **Bestimmen des Punktes, indem der Raubvogel erstmals geortet werden kann**

(4P)

Der Aufgabenstellung kannst du entnehmen, dass sich im Punkt V mit $V(-340 | 1740 | 200)$ eine Vogelwarte befindet, die für Vögel über ein Ortungssystem mit einer Reichweite von 1750 m verfügt.

Deine Aufgabe ist es nun, den Punkt Q auf der Flugbahn $\overrightarrow{P_0P_1}$ des Raubvogels zu bestimmen, in dem der Raubvogel genau einen Abstand von 1750 m zur Vogelwarte besitzt und damit erstmalig geortet werden kann.

Allgemein wird der Abstand zwischen zwei Punkten über den Betrag des zugehörigen Vektors berechnet. Hier soll nun jedoch ein Punkt Q auf der Flugbahn, deren Richtung durch den Vektor $\overrightarrow{P_0P_1}$ beschrieben wird, so bestimmt werden, dass dieser zum Punkt V einen Abstand von 1750 m besitzt. Willst du einen solchen Punkt bestimmen, so definierst du zunächst eine Gerade r , welche die Flugbahn des Raubvogels beschreibt.

Gerade r beschreibt also jeden Punkt auf der Flugbahn des Raubvogels. Fasse Gerade r als einen von einem bestimmten Parameter abhängigen Punkt P_r auf und berechne die Länge des Vektors $\overrightarrow{P_rV}$ in Abhängigkeit des Parameters von Gerade r . Hast du diesen Vektor bestimmt $\overrightarrow{P_rV}$, so lässt sich mit diesem und der Abstandsangabe 1750 m der Parameter von r so bestimmen, dass Punkt Q berechenbar ist.

c) (1) ► **Berechnen des Abstands zwischen Sing- und Raubvogel**

(4P)

Aus dem vorhergegangenen Aufgabenteil ist dir bekannt, dass der Singvogel im Punkt $S(-400 | 1800 | 500)$ aus dem Nebel sticht. Dabei hat dieser 5 Minuten benötigt, um von seiner ursprünglichen Position Q_0 zur Nebelgrenze zu gelangen. Deine Aufgabe ist es nun, den Abstand der Vögel zueinander zu berechnen und zwar an jenem Zeitpunkt, an welchem der Singvogel den Nebel verlässt.

Dazu berechnest du zuerst die Position des Raubvogels nach $t = 5 \text{ min} = 300 \text{ s}$. Hast du diese bestimmt, so berechnest du über den Betrag des Vektors der Positionen der Vögel den Abstand zwischen diesen.

(2) ► Winkel zwischen ursprünglicher und neuer Flugbahn des Raubvogels

Der Winkel zwischen Vektoren berechnet sich im Allgemeinen über folgende Formel:

$$\cos \beta = \frac{\vec{u} \circ \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

Dabei sind \vec{u} und \vec{v} die für die Rechnung relevanten Vektoren. Deine Aufgabe ist es hier, den Winkel zwischen der ursprünglichen und der neuen Flugbahn des Raubvogels zu berechnen. Die ursprüngliche Flugbahn des Raubvogels wurde durch den Vektor $\overrightarrow{P_0P_1}$ modelliert.

Nachdem der Raubvogel den Singvogel erspäht hat, fliegt dieser in Richtung des Singvogels, also in Richtung des Punktes S. Die neue Flugrichtung wird also durch folgenden Vektor modelliert:

$$\overrightarrow{P_{300}S} = \begin{pmatrix} -400 - (-340) \\ 1800 - 1740 \\ 500 - 530 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -60 \\ 60 \\ -30 \end{pmatrix}$$

d) ► Berechnen der mindestens erforderlichen Sichtweite im Frühnebel

(4P)

Zum Zeitpunkt, an welchem der Raubvogel den Singvogel erspäht, befindet sich der Raubvogel im Punkt $P_{300}(-340 | 1740 | 530)$ und der Singvogel im Punkt $S(-400 | 1800 | 500)$. Wie du der Aufgabenstellung entnehmen kannst, fliegt der Singvogel, nachdem der Raubvogel ihn erspäht hat, in die gleiche Richtung wie dieser, das heißt, der Singvogel fliegt in Richtung dieses Vektors (siehe c):

$$\overrightarrow{P_{300}S} = \begin{pmatrix} -60 \\ 60 \\ -30 \end{pmatrix}$$

Darüber hinaus kannst du der Aufgabenstellung entnehmen, dass beide Vögel, nachdem sie sich gesehen haben, mit dem dreifachen ihrer ursprünglichen Geschwindigkeit fliegen. Das heißt, der Raubvogel ist mit einer Geschwindigkeit von $v_R = 3 \cdot 61,2 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 51 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ und der Singvogel mit einer Geschwindigkeit von $v_S = 3 \cdot 32,4 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 27 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ unterwegs.

Willst du nun berechnen, wie groß die mindestens erforderliche Sichtweite im Frühnebel sein muss, damit der Raubvogel den Singvogel nicht aus den Augen verliert, so berechnest du im ersten Schritt, welchen Abstand der Raubvogel zum Frühnebel besitzt. Hast du diesen Abstand ermittelt, so ermittelst du die Zeit, welche der Raubvogel benötigt, um den Frühnebel zu erreichen. Anschließend berechnest du, wie weit der Singvogel in dieser Zeitspanne in den Frühnebel eintauchen konnte. Die resultierende Distanz gibt dir dann die Mindestsichtweite im Frühnebel an, welche der Raubvogel besitzen muss um den Singvogel nicht aus den Augen zu verlieren.