a) (1) ▶ **Bestimmen der Richtung, in die von S aus gegraben werden muss** (11P)

Der Aufgabenstellung kannst du entnehmen, dass sich in einem Bergwerk ein Tunnel befindet, der geradlinig durch die Punkte $A(73 \mid -16 \mid -24)$ und $B(7 \mid 17 \mid -2)$ zum Ausgang im Punkt R verläuft. Vom Punkt S mit $S(45 \mid 10 \mid 0)$ werden nun geradlinig Stollen gegraben, die auf ebendiesen Tunnel treffen.

Deine Aufgabe ist es, die Richtung zu bestimmen, in die von S aus gegraben werden muss, damit ein Stollen auf den Punkt A trifft. Die Richtung, in welche hier gegraben werden muss, wird festgelegt durch einen Vektor. Willst du die Richtung bestimmen, in die von S aus gegraben werden muss, damit ein Stollen auf A trifft, bestimmst du also den Vektor, welcher von S aus in Richtung von A zeigt.

(2) ▶ **Berechnen der Länge des Stollens**

Nun sollst du die Länge des Stollens, welcher Punkt S und Punkt A verbindet, berechnen. Beachte dabei, dass eine Längeneinheit insgesamt 10 m entspricht (1 LE = 10 m). Vektor $\overrightarrow{SA}$, welchen du eben bestimmt hast, gibt dazu nicht nur die Richtung des Stollens zwischen S und A an, er repräsentiert auch gleichzeitig dessen Länge.

(3) ▶ **Berechnen der Größe des Winkels, in welchem der Stollen auf den Tunnel trifft**

Weiterhin sollst du die Größe des Winkels α berechnen, in welchem der Stollen zwischen S und A auf den Tunnel, der geradlinig durch die Punkte A und B verläuft, trifft. Die Richtung des Tunnels, der geradlinig durch die Punkte A und B verläuft, kann durch den Vektor $\overrightarrow{AB}$ beschrieben werden. Willst du nun berechnen, in welchem Winkel α der Stollen auf den Tunnel trifft, so berechnest du den Winkel zwischen den Vektoren $\overrightarrow{SA}$ und $\overrightarrow{AB}$.

Für den Winkel α zwischen zwei beliebigen Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ gilt dabei:

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{u} \circ \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}.$$

Bevor du jedoch den hier gesuchten Winkel α bestimmen kannst, ermittelst du Vektor $\overrightarrow{AB}$, welcher die Richtung des Tunnels beschreibt.

(4) ▶ **Ermitteln der Koordinaten von R**

Der Ausgang des Tunnels befindet sich im Punkt R. Der Aufgabenstellung kannst du dabei entnehmen, dass dieser Punkt R sich auf der Erdoberfläche befinden muss. Die Erdoberfläche befindet sich dabei in der x-y-Ebene.

Deine Aufgabe ist es nun, die Koordinaten dieses Punktes R zu berechnen.

Beschreibe dazu zunächst den Tunnel durch die Punkte A und B durch eine Gerade g_{AB}. Da eine Gerade stets einen Stütz- und Richtungsvektor benötigt, kannst du hier den Ortsvektor $\overrightarrow{OA}$ von Punkt A als Stütz- und den Vektor $\overrightarrow{AB}$ als Richtungsvektor von Gerade g_{AB} verwenden.

Die Koordinaten von R ergeben sich als Schnittpunkt von Gerade g_{AB} und der Erdoberfläche, welche durch die x-y-Ebene beschrieben wird. Gehe beim Berechnen der Koordinaten von R so vor:

- Bestimme eine Gleichung der Geraden g_{AB}.
- Alle Punkte auf der x-y-Ebene haben eine z-Koordinate von Null. Setze also $z = 0$ in die Geradengleichung der Geraden g_{AB} ein und bestimme so den Parameterwert für s.
- Löse nach den verbliebenen Koordinaten x und y auf und bestimme so die vollständigen Koordinaten von R.

b) **▶ Ermitteln der Koordinaten des Punktes P, in dem der Stollen auf den Tunnel trifft** (4P)

Ein zweiter Stollen verläuft nun vom Punkt S aus in Richtung des Vektors $\vec{u}$, mit $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3,5 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Deine Aufgabe ist es, die Koordinaten des Punktes P, in dem dieser Stollen auf den Tunnel trifft, zu berechnen.

Oben hast du den Tunnel, welcher geradlinig durch die Punkte A und B verläuft, durch Gerade g_{AB} beschrieben:

$$g_{AB}: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 73 \\ -16 \\ -24 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -66 \\ 33 \\ 22 \end{pmatrix}.$$

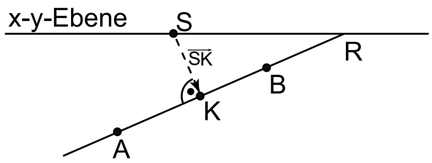
Willst du nun jenen Punkt P berechnen, indem der behandelte Stollen auf den Tunnel trifft, so beschreibst du diesen Stollen zunächst als eine Gerade s. Gerade s besitzt dabei als Stützvektor den Ortsvektor $\overrightarrow{OS}$ von Punkt S und als Richtungsvektor den angegebenen Vektor $\vec{u}$.

Hast du Gerade s definiert, so setzt du diese mit der Geraden g_{AB} gleich, denn die Koordinaten des gesuchten Punktes P entsprechen den Koordinaten des Schnittpunkts der Geraden s mit der Geraden g_{AB}. Hast du g_{AB} und s gleichgesetzt, so löst du das resultierende lineare Gleichungssystem und ermittelst mit den bestimmten Parameterwerten die Koordinaten von P.

c) **▶ Bestimmen der Richtung, in welche gegraben werden muss und die Koordinaten von K** (6P)

Nun soll vom Punkt S aus der kürzeste Stollen gegraben werden, der zum Tunnel führt. Deine Aufgabe ist es dabei, die Richtung zu bestimmen, in welche gegraben werden muss und die Koordinaten von Punkt K, in dem der Stollen auf den Tunnel trifft. Hier soll der **kürzeste** Stollen gegraben werden, das heißt, du bestimmst die Koordinaten von Punkt K so, dass die Entfernung zwischen diesem und dem Punkt S am kleinsten ist.

Punkt K liegt dabei irgendwo auf der Geraden g_{AB}. Die kleinste Entfernung zwischen einem Punkt und einer Geraden entspricht immer dem Abstand zwischen diesen. Der Abstand entspricht wiederum der Länge des Vektors, welcher rechtwinklig auf der Geraden g_{AB} steht und durch den Punkt S verläuft.



Du fällst also ein Lot von Punkt S aus auf die Gerade g_{AB}, welchen den Tunnel beschreibt. Der dabei bestimmte Lotvektor entspricht dann der Richtung, in welche gegraben werden muss und die Koordinaten des sogenannten Lotfußpunktes entsprechen dann den gesuchten Koordinaten von K. Gehe dabei so vor:

- Definiere eine Hilfsebene H. Diese Hilfsebene H verläuft senkrecht zur Geraden g_{AB} und durch den Punkt S. Bestimme eine Gleichung dieser Geraden in Koordinatenform.
- Bestimme die Koordinaten des Schnittpunkts von Gerade g_{AB} und Hilfsebene H. Der Schnittpunkt von g_{AB} und H entspricht dann dem gesuchten Lotfußpunkt bzw. dem gesuchten Punkt K.
- Ermittle mit den Koordinaten von S und K die Richtung, in welche gegraben werden muss.

d) ► **Ebenengleichung der Ebene ABS aufstellen** (5P)

Eine Ebene wird immer eindeutig durch drei Punkte aufgespannt. Dabei dient ein Punkt dazu den Stützvektor zu erhalten. Die verbleibenden beiden Punkte werden dann zum Aufstellen der Richtungsvektoren benötigt. Die Ebenengleichung in Parameterform baut sich dann auf über:

$$ABS: \overrightarrow{x} = \overrightarrow{OA} + s \cdot \overrightarrow{AB} + t \cdot \overrightarrow{AS}$$

Die Koordinatengleichung erhältst du dann über den Normalenvektor der Ebene mit:

$$ABS: \; n_1 \cdot x + n_2 \cdot y + n_3 \cdot z = \overrightarrow{n} \circ \overrightarrow{OA}, \text{wobei } \overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \text{ der Normalenvektor der Ebene ist.}$$

Gehe also wie folgt vor.

1. Stelle die Parametergleichung der Ebene ABS auf
2. Berechne über das Vektorprodukt der Richtungsvektoren den Normalenvektor
3. Bestimme die Koordinatengleichung über die oben stehende Form

► **Schnittgerade bestimmen**

Um die Schnittgerade zu bestimmen, stelle zunächst ein Gleichungssystem aus den beiden Koordinatengleichungen der Ebene E und der Ebene ABS auf. Dieses hat dann die Form

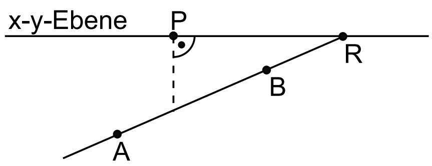
$$\begin{array}{lrcrcrcr} \text{I} & 220 \cdot x & + & 968 \cdot y & - & 792 \cdot z & = & 19.580 \\ \text{II} & & & -2y & + & 3z & = & -40 \end{array}$$

Dabei handelt es sich um ein unterbestimmtes Gleichungssystem, das du nur in Abhängigkeit von einem Parameter lösen kannst. Setze $z = t$. Der Parameter t ist am Ende der Parameter, von dem die Geradengleichung abhängt.

e) **► Berechnen der Koordinaten des Punktes, für die Bohrung an der Erdoberfläche** (4P)

In einer Entfernung von 140 m vom Punkt B auf der Strecke $\overline{AB}$ soll ein zur Erdoberfläche senkrechter Notausstieg enden. Deine Aufgabe ist es nun, die Koordinaten des Punktes zu bestimmen, an welchen die Bohrung an der Erdoberfläche dabei beginnen muss.

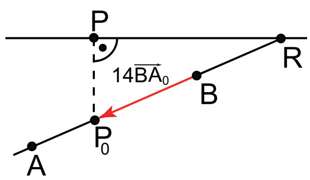
Beim Lösen dieser Aufgabe kann es sinnvoll sein, wenn du dir eine Skizze des Sachverhalts in der Seitenansicht erstellst. Achte beim Zeichnen der Skizze darauf, dass der Notausstiegstunnel (in der Skizze gestrichelt) an der Erdoberfläche, welche durch die x-y-Ebene repräsentiert wird, enden muss und dass dieser rechtwinklig zu dieser Ebene verläuft.



Willst du ausgehend davon die Koordinaten des Punktes P bestimmen, an welchem der Notausstiegstunnel an der Erdoberfläche endet, so musst du zunächst jenen Punkt auf der Strecke $\overline{AB}$ bestimmen, an welchem der Notausstiegstunnel auf den Tunnel trifft.

Nutze dazu die Information, dass der Notausstieg in 140 m Entfernung vom Punkt B auf der Strecke $\overline{AB}$ enden soll. Aus der Aufgabenstellung weißt du, dass eine Längeneinheit hier 10 m entspricht. Das heißt, der Punkt an welchem der Notausstieg auf der Strecke $\overline{AB}$ enden soll ist 14 LE vom Punkt B entfernt.

Um also vom Punkt B zu jenem Punkt P_0 zu „gelangen", an welchem der Notausstieg im Tunnel enden soll, musst du 14 LE entlang der Strecke $\overline{BA}$ in der Richtung des Vektors $\overrightarrow{BA}$ „gehen". Dazu musst du jenen Vektor bestimmen, welcher die Richtung des Vektors $\overrightarrow{BA}$ hat und eine Länge von 1 besitzt.



Das heißt, du normierst den Vektor $\overrightarrow{BA}$ auf eine Länge von 1 und addierst diesen dann insgesamt 14 Mal zum Ortsvektor $\overrightarrow{OB}$ des Punktes B. Hast du Punkt P_0 bestimmst, so überlege dir, wie dessen Koordinaten verändert werden müssen, damit dieser in der x-y-Ebene bzw. der Erdoberfläche liegt.