a) **▶ Geschwindigkeit $v$ in der Startflugphase berechnen** (4P)

Der Parameter $t$ in der Geradengleichung beschreibt die Zeit in Sekunden. Also bewegt sich das Flugzeug in jeder Sekunden einmal um den Richtungsvektor vorwärts.

Die Strecke, die es dabei zurücklegt, entspricht dem **Betrag** des Richtungsvektors. Berechne diesen Betrag:

$$\left|\begin{pmatrix}30\\48\\36\end{pmatrix}\right| = \sqrt{30^2+48^2+36^2} = \sqrt{4.500} \approx 67{,}082$$

Pro Sekunde legt das Flugzeug eine Strecke von etwa 67,08 m zurück. Seine Geschwindigkeit in der Startflugphase beträgt also $67{,}08\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

**▶ Steigungswinkel berechnen**

Es wird davon ausgegangen, dass der Flug des Flugzeugs in der Startflugphase durch die Gerade $g$ beschrieben werden kann. Damit ist der **Steigungswinkel** des **Flugzeugs** gleich dem **Steigungswinkel** der **Geraden** $g$. Dieser wiederum ist der Winkel $\alpha$, welcher die **Gerade** mit der **$x_1$,$x_2$-Koordinatenebene** einschließt.

Du kannst so vorgehen:

- Bestimme zunächst den Richtungsvektor $\vec{u}$ der Geraden und den Normalenvektor $\vec{n}$ der $x_1$, $x_2$-Koordinatenebene.
- Für den Winkel $\alpha$, den eine Ebene mit einer Geraden einschließt, gilt: $\sin(\alpha) = \dfrac{\vec{u}\circ\vec{n}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{n}|}$.

**1. Schritt: Vektoren bestimmen**

Den Richtungsvektor der Geraden erhältst du aus der Geradengleichung: $\vec{u} = \begin{pmatrix}30\\48\\36\end{pmatrix}$. Der Normalenvektor der $x_1$,$x_2$-Koordinatenebene ist gerade der Vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

**2. Schritt: Winkel berechnen**

Einsetzen der Vektoren in die Formel ergibt:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha) &= \frac{\begin{pmatrix}30\\48\\36\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}30\\48\\36\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|} = \frac{30\cdot 0+48\cdot 0+36\cdot 1}{\sqrt{30^2+48^2+36^2}\cdot\sqrt{0^2+0^2+1^2}}\\ &= \frac{36}{\sqrt{4.500}\cdot 1} \approx 0{,}5367\end{aligned}$$

Damit folgt der Winkel $\alpha = \sin^{-1}(0{,}5367) = 32{,}46\,^\circ$.

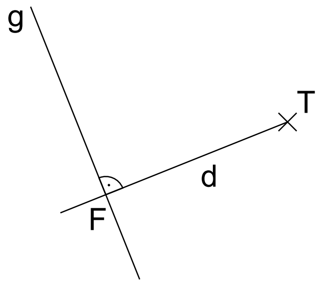
In der Startflugphase liegt der Steigungswinkel des Flugzeugs bei etwa 32,46 °.

b) ► **Kürzeste Entfernung berechnen** (7P)

Die „kürzeste Entfernung" ist gerade der **Abstand**. Gesucht ist also der Abstand des Towers von der Flugbahn bzw. der Abstand des Punktes $T$ von der Geraden $g$. Den Abstand eines Punktes von einer Geraden kannst du auf zwei verschiedene Weisen berechnen; entweder über das **Skalarprodukt** (Lösungsweg A) oder über eine **Hilfsebene** (Lösungsweg B).

►► **Lösungsweg A: Abstand mit Skalarprodukt berechnen**

Der Abstand wird immer **senkrecht** zur Geraden gemessen. Bestimme also den **Lotfußpunkt** $F$ von $T$ auf $g$. Dann hast du mit $F$ nämlich den Punkt auf der Geraden $g$ gefunden, der die kleinste Entfernung von Punkt $T$ hat. Der **Betrag** des Vektors $\overrightarrow{TF}$ ist dann der Abstand der Gerade $g$ und des Punktes $T$.




Der Lotfußpunkt $F$ muss zwei Eigenschaften erfüllen:

1. Er liegt auf der Geraden $g$
2. Der Vektor $\overrightarrow{TF}$ muss **senkrecht** zur Richtungsvektor $\vec{u}$ der Geraden $g$ stehen.

Du kannst also so vorgehen:

- Bestimme mithilfe der Geradengleichung zunächst die **allgemeinen** Koordinaten von Punkt $F$.
- Berechne mithilfe dieses Punktes die Koordinaten von Vektor $\overrightarrow{TF}$
- Dieser Vektor soll mit dem Richtungsvektor $\vec{u}$ der Geraden einen rechten Winkel einschließen. Das ist der Fall, wenn deren Skalarprodukt Null ist. Bestimme also $t$ so, dass gilt: $\overrightarrow{TF} \circ \vec{u} = 0$.
- Berechne zuletzt die genauen Koordinaten des Vektors $TF$, sowie dessen Betrag, denn es gilt ja: $d(g;T) = \left|\overrightarrow{TF}\right|$.

**1. Schritt: Allgemeine Koordinaten von $F$ und von Vektor $\overrightarrow{TF}$ bestimmen**

Alle Punkte, die auf der Geraden $g$ liegen, haben allgemein die Koordinaten $F_t\,(-200+30t \mid -400+48t \mid 36t)$.
Also hat auch unser gesuchter Punkt $F$ zunächst diese Koordinaten.

Für den Vektor $\overrightarrow{TF}$ folgt dann:

$$\overrightarrow{TF} = \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OT} = \begin{pmatrix} -200+30t \\ -400+48t \\ 36t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 100 \\ 30 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -200+30t & - & 0 \\ -400+48t & + & -100 \\ 36t & - & 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -200+30t \\ -500+48t \\ -30+36t \end{pmatrix}$$

**2. Schritt: Wert für $t$, exakte Koordinaten von $\overrightarrow{TF}$ und den Abstand berechnen**

Das Skalarprodukt der Vektoren $\overrightarrow{TF}$ und $\vec{u}$ soll Null ergeben:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} -200+30t \\ -500+48t \\ -30+36t \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 30 \\ 48 \\ 36 \end{pmatrix} &= 0 \\
(-200+30t)\cdot 30 + (-500+48t)\cdot 48 + (-30+36t)\cdot 36 &= 0 \\
-6.000 + 900t - 24.000 + 2.304t - 1.080 + 1.296t &= 0 \\
4.500t - 31.080 &= 0 \qquad \mid +31.080 \\
4.500t &= 31.080 \qquad \mid : 4.500 \\
t &= \frac{518}{75}
\end{aligned}$$

Einsetzen von $t = \frac{518}{75}$ in die allgemeinen Koordinaten von $\overrightarrow{TF}$ liefert:

$$\overrightarrow{TF} = \begin{pmatrix} -200+30\cdot\frac{518}{75} \\ -500+48\cdot\frac{518}{75} \\ -30+36\cdot\frac{518}{75} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -200+207{,}2 \\ -500+331{,}52 \\ -30+248{,}64 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7{,}2 \\ -168{,}48 \\ 218{,}64 \end{pmatrix}$$

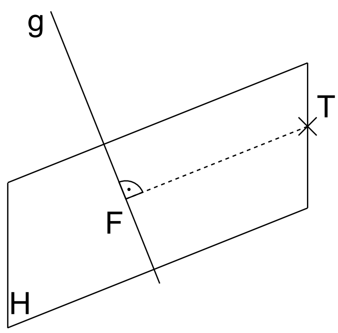
Der Betrag dieses Vektors entspricht dem Abstand des Punktes $T$ von der Geraden $g$:

$$\left|\overrightarrow{TF}\right| = \left|\begin{pmatrix} 7{,}2 \\ -168{,}48 \\ 218{,}64 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(7{,}2)^2 + (-168{,}48)^2 + (218{,}64)^2} = \sqrt{76.240{,}8} \approx 276{,}117$$

Damit folgt: Die kürzeste Entfernung des startenden Flugzeugs zum Tower beträgt etwa 276,1 m.

**►► Lösungsweg B: Abstand über Hilfsebene berechnen**

Der Abstand wird immer **senkrecht** zur Geraden gemessen. Bestimme also den **Lotfußpunkt** $F$ von $T$ auf $g$. Dann hast du mit $F$ nämlich den Punkt auf der Geraden $g$ gefunden, der die kleinste Entfernung von Punkt $T$ hat. Der **Betrag** des Vektors $\overrightarrow{TF}$ ist dann der Abstand der Gerade $g$ und des Punktes $T$.




Der Lotfußpunkt $F$ muss zwei Eigenschaften erfüllen:

1. Er liegt auf der Geraden $g$
2. Der Vektor $\overrightarrow{TF}$ muss **senkrecht** zur Richtungsvektor $\vec{u}$ der Geraden $g$ stehen.

Du kannst also so vorgehen:

- Bestimme die Gleichung einer **Hilfsebene** $H$, welche den Punkt $T$ enthält und senkrecht zur Geraden $g$ verläuft. Als Aufpunkt der Ebene kannst du $T$ wählen, und als Normalenvektor der Richtungsvektor $\vec{u}$ der Geraden.
- Berechne den **Schnittpunkt** der Hilfsebene $H$ und der Geraden $g$. Dies ist gerade der **Lotfußpunkt** $F$.
- Berechne zuletzt die Koordinaten des Vektors $TF$, sowie dessen Betrag, denn es gilt ja: $d(g;T) = \left|\overrightarrow{TF}\right|$.

**1. Schritt: Gleichung der Hilfsebene bestimmen**

Wähle als Aufpunkt den Punkt $T$ und als Normalenvektor den Vektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} 30 \\ 48 \\ 36 \end{pmatrix}$. Wir bestimmen die Ebenengleichung in **Koordinatenform**. Diese lautet allgemein:

$H : ax_1 + bx_2 + cx_3 = d.$

Dabei sind $a$, $b$ und $c$ die Koordinaten des Normalenvektors. Einsetzen der Koordinaten von $\vec{u}$ liefert:

$H : 30x_1 + 48x_2 + 36x_3 = d.$

Setze zuletzt die Koordinaten von Punkt $T$ ein, um den Wert für $d$ zu bestimmen:

$30 \cdot 0 + 48 \cdot 100 + 36 \cdot 30 = 4.800 + 1.080 = 5.880 = d.$

Die Hilfsebene $H$ hat die Gleichung $H : 30x_1 + 48x_2 + 36x_3 = 5.880$. Sie enthält den Punkt $T$ und steht senkrecht auf der Geraden $g$.

**2. Schritt: Schnittpunkt *F* von *H* und *g* berechnen**

Die Gleichung von $H$ liegt in Koordinatenform vor. Du kannst die Geradengleichung von $g$ also auf die drei Zeilen „aufteilen“ und anschließend zeilenweise für $x_1$, $x_2$ und $x_3$ einsetzen. Löse diese Gleichung dann nach $t$ auf.

$$g: \quad \begin{aligned} x_1 &= -200 + 30t \\ x_2 &= -400 + 48t \\ x_3 &= 36t \end{aligned}$$

Einsetzen in die Koordinatenform von $H$ ergibt die Gleichung:

$$\begin{aligned} 30 \cdot (-200 + 30t) + 48 \cdot (-400 + 48t) + 36 \cdot 36t &= 5.880 \\ -6.000 + 900t - 19.200 + 2.304t + 1.296t &= 5.880 \\ -25.200 + 4.500t &= 5.880 && \mid +25.200 \\ 4.500t &= 31.080 && \mid : 4.500 \\ t &= \frac{518}{75} \end{aligned}$$

Setze $t = \frac{518}{75}$ ein in die Geradengleichung von $g$ und erhalte die Koordinaten von $F$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OF} &= \begin{pmatrix} -200 \\ -400 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{518}{75} \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 48 \\ 36 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -200 \\ -400 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 207,2 \\ 331,52 \\ 248,64 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7,2 \\ -68.48 \\ 248,64 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

**3. Schritt: Koordinaten von $\overrightarrow{TF}$ und den Abstand berechnen**

Für den Vektor $\overrightarrow{TF}$ ergibt sich nun:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{TF} &= \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OT} \\ &= \begin{pmatrix} 7,2 \\ -68.48 \\ 248,64 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 100 \\ 30 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7,2 \\ -168.48 \\ 218,64 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Der Betrag dieses Vektors entspricht dem Abstand des Punktes $T$ von der Geraden $g$:

$$\left|\overrightarrow{TF}\right| = \left|\begin{pmatrix} 7,2 \\ -168,48 \\ 218,64 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(7,2)^2 + (-168,48)^2 + (218,64)^2} = \sqrt{76.240,8} \approx 276,117$$

Damit folgt: Die kürzeste Entfernung des startenden Flugzeugs zum Tower beträgt etwa 276,1 m.

c) ▶ **Geschwindigkeit des Flugzeugschattens bestimmen** (10P)

In unserem Fall wird das Flugzeug durch einen **Punkt** beschrieben. Der Schatten dieses Punktes kommt zustande, indem die Sonnenstrahlen diesen Punkt entlang des Vektors $\vec{s}$ in die $x_1$,$x_2$-Koordinatenebene projizieren. Da in der Aufgabenstellung davon ausgegangen wird, dass das Flugzeug mit gleichbleibender Geschwindigkeit fliegt, bewegt sich auch der **Schatten** mit gleichbleibender Geschwindigkeit fort.

Du kannst so vorgehen:

- Bestimme die Position des Flugzeugs zu zwei beliebigen Zeitpunkten, z.B. zum Zeitpunkt $t = 0$ und $t = 1$. Die Koordinaten des Flugzeuges erhältst du durch Einsetzen der $t$-Werte in die Geradengleichung von $g$.
- Berechne die Koordinaten der zugehörigen Schattenpunkte $S_1$ und $S_2$.
- Berechne im letzten Schritt den **Abstand** dieser beider Schattenpunkte und teile diesen durch die **Zeit**, die das Flugzeug für diese Strecke gebraucht hat. So erhältst du die Geschwindigkeit des Schattens in $\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

**1. Schritt: Zwei Positionen des Flugzeugs bestimmen**

Wir wählen, wie oben angekündigt, die Zeitpunkte $t = 0$ und $t = 1$. Einsetzen der beiden $t$-Werte in die Geradengleichung liefert die beiden Punkte $P_0$ und $P_1$.

$$\overrightarrow{OP_0} = \begin{pmatrix} -200 \\ -400 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 48 \\ 36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -200 \\ -400 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OP_1} = \begin{pmatrix} -200 \\ -400 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 48 \\ 36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -170 \\ -352 \\ 36 \end{pmatrix}$$

Es folgen die Punkte $P_0\,(-200 \mid -400 \mid 0)$ und $P_1\,(-170 \mid -352 \mid 36)$.

### 2. Schritt: Koordinaten der Schattenpunkte bestimmen

Die Sonnenstrahlen projizieren die beiden Punkte $P_0$ und $P_1$ in die $x_1$,$x_2$-Koordinatenebene. Dabei fällt auf: Der Punkt $P_0$ liegt bereits in dieser Ebene, erst ist der Punkt, in dem das Flugzeug abhebt. Er ist somit identisch mit seinem Schattenpunkt.

Berechne also noch die Koordinaten des Schattenpunktes $S_1$: Der Weg, den die Sonnenstrahlen „gehen", kannst du du eine Gerade $h$ modellieren, welche den Aufpunkt $P_1$ hat und den Richtungsvektor $\vec{s}$:

$$h : \vec{x} = \begin{pmatrix} -170 \\ -352 \\ 36 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 20 \\ -30 \end{pmatrix}$$

Der Schattenpunkt $S_1$ ist nun gerade der **Schnittpunkt** dieser Geraden $h$ mit der $x_1$,$x_2$-Koordinatenebene. Dieser Punkt hat die $x_3$-Koordinate $x_3 = 0$. Setze dies ein in die Geradengleichung und löse nach den verbleibenden Koordinaten auf:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -170 \\ -352 \\ 36 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 20 \\ -30 \end{pmatrix}$$

Aus Zeile (3) folgt:
$$\begin{aligned} 0 &= 36 - 30r && \mid +30r \\ 30r &= 36 && \mid :30 \\ r &= 1,2 \end{aligned}$$

Einsetzen von $r = 1,2$ in die Gleichung von $h$ ergibt:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OS_1} &= \begin{pmatrix} -170 \\ -352 \\ 36 \end{pmatrix} + 1,2 \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 20 \\ -30 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -170 \\ -352 \\ 36 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -12 \\ 24 \\ -36 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -182 \\ -328 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

### 3. Schritt: Abstand der Schattenpunkte und Geschwindigkeit berechnen

Da wir die Zeitpunkte $t = 0$ und $t = 1$ gewählt haben, ist klar: der Flugzeugschatten benötigt 1 Sekunde, um von Punkt $P_0$ zu Punkt $S_1$ zu gelangen. Berechne die Länge der Strecke, welche das Flugzeug hier zurücklegt:

$$\begin{aligned} \left|\overrightarrow{P_0S_1}\right| &= \left|\begin{pmatrix} -182 & - & (-200) \\ -328 & - & (-400) \\ 0 & - & 0 \end{pmatrix}\right| \\ &= \left|\begin{pmatrix} 18 \\ 72 \\ 0 \end{pmatrix}\right| \\ &= \sqrt{18^2 + 72^2 + 0^2} = \sqrt{5.508} \approx 74,2159 \end{aligned}$$

Der Flugzeugschatten legt in 1 Sekunde etwa 74,2 m zurück. Seine Geschwindigkeit beträgt also etwa 74,2 $\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

**► Aspekte erläutern, welche die Geschwindigkeit beeinflussen**

In diesen vereinfachten Modell ist das Flugzeug, sowie sein Schatten nur als **Punkt** dargestellt, das mit vollkommen gleichbleibender Geschwindigkeit fliegt. Außerdem wird die Erde mit der $x_1$,$x_2$-Koordinatenebene als vollständig flach und ungekrümmt angenommen.
In der Realität sieht das natürlich anders aus:

- das Flugzeug **beschleunigt** nach dem Abheben weiterhin bis auf Reisegeschwindigkeit. Entsprechend beschleunigt auch der Schatten am Boden seine Geschwindigkeit.
- Wenn der Boden nicht **flach** ist, sondern das Gelände ansteigt oder fällt, so **verlängert sich** der Weg, den der Schatten zurücklegen muss. Die Zeit zwischen zwei Schattenpunkten bleibt aber gleich, also ist die Geschwindigkeit des Schattens desto größer, je unebener der Boden tatsächlich ist.

d) **► Abstand der beiden Flugzeuge bestimmen** (9P)

Setze jeweils $t = 0$ in die Gleichung der beiden Geraden ein. Hierdurch bleibt nur der **Stützvektor** der Geraden stehen, der Richtungsvektor wird ja mit Null multipliziert. Also ergeben sich die beiden Punkte

$F_1\,(-200 \mid -400 \mid 0)$ und $F_2\,(-3.000 \mid -8.000 \mid 6.000)$

Der Abstand der beiden Punkte ist gerade der Betrag des Vektors $\overrightarrow{F_1F_2}$:

$$\begin{aligned} d(F_1;F_2) &= \left|\overrightarrow{F_1F_2}\right| = \left|\overrightarrow{OF_2} - \overrightarrow{OF_1}\right| \\ &= \left|\begin{pmatrix} 3.000 \\ -8.000 \\ 6.000 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -200 \\ -400 \\ 0 \end{pmatrix}\right| \\ &= \left|\begin{pmatrix} 3.200 \\ -7.600 \\ 6.000 \end{pmatrix}\right| \\ &= \sqrt{(3.200)^2 + (-7.600)^2 + 6.000^2} = \sqrt{104.000.000} \approx 10.198 \end{aligned}$$

Zum Zeitpunkt $t = 0$ sind die beiden Flugzeuge etwa 10.198 m voneinander entfernt. Das entspricht einer Entfernung von etwa 10,2 km.

**► Zeitpunkt des kleinsten Abstandes berechnen**

Achte zunächst auf die Aufgabenstellung: Gefragt ist **nicht** nach dem kleinsten Abstand der beiden Geraden! Gefragt ist nach dem kleinsten Abstand der Punkte für den gleichen Wert von $t$.

Wir wollen die beiden Flugzeugpostionen wieder mit $F_1$ und $F_2$ bezeichnen. Du kannst so vorgehen:

- Bestimme zunächst die allgemeinen Koordinaten von $F_1$ und $F_2$.
- Berechne dann in Abhängigkeit von $t$ den **Abstand** $d(t)$ der beiden Punkte.
- Gesucht ist $t$ so, dass dieser Abstand **minimal** wird. Berechne also das **Minimum** der Funktion $d$.

**1. Schritt: Koordinaten der Punkte bestimmen**

Da sich die Flugzeuge immer auf ihrer jeweiligen Flugbahn (der Geraden) fortbewegen, haben diese Punkte allgemein die Koordinaten:
$F_1\,(-200+30t \mid -400+48t \mid 36t)$ und $F_2\,(3.000 \mid -8.000+150t \mid 6.000)$.

**2. Schritt: Abstand berechnen**

Der Abstand der beiden Punkte entspricht dem Betrag des Verbindungsvektors $\overrightarrow{F_1F_2}$:

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{F_1F_2}\right| &= \left|\overrightarrow{OF_2}-\overrightarrow{OF_1}\right|\\ &= \left|\begin{pmatrix}3.000\\-8.000+150t\\6.000\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-200+30t\\-400+48t\\36t\end{pmatrix}\right|\\ &= \left|\begin{pmatrix}3.200-30t\\-7.600+102t\\6.000-36t\end{pmatrix}\right|\\ &= \sqrt{(3.200-30t)^2+(-7.600+102t)^2+(6.000-36t)^2}\end{aligned}$$

Damit folgt die Abstandsfunkton $d$ mit $d(t)=\sqrt{(3.200-30t)^2+(-7.600+102t)^2+(6.000-36t)^2}$.

**3. Schritt: Minimum von *d* berechnen**

Der Ausdruck $\sqrt{(3.200-30t)^2+(-7.600+102t)^2+(6.000-36t)^2}$ wird minimal, wenn der **Radikand** des Ausdrucks minimal wird. Du kannst also die Extremstellen der Funktion $a$ mit $a(t)=(3.200-30t)^2+(-7.600+102t)^2+(6.000-36t)^2$ berechnen.

Bestimme im ersten Schritt die ersten beiden Ableitungen von $a$. Bestimme dann mithilfe des notwendigen Kriteriums die möglichen Extremstellen und untersuche diese mit dem hinreichenden Kriterium auf ihre **Art**:

**►► Ableitungen bilden**

$$\begin{aligned}a'(t) &= 2\cdot(3.200-30t)\cdot(-30)+2\cdot(-7.600+102t)\cdot 102+2\cdot(6.000-36t)\cdot(-36)\\ &= -60\cdot(3.200-30t)+204\cdot(-7.600+102t)-72\cdot(6.000-36t)\\ &= -192.000+1.800t-1.550.400+20.808t-432.000+2.592t\\ &= -2.174.400+25.200t\end{aligned}$$

$$a''(t)=25.200$$

**►► Notwendiges Kriterium: mögliche Extrema ermitteln**

Setze $a'(t)=0$ und löse nach $t$ auf.

$$
\begin{aligned}
a'(t) &= 0 \\
-2.174.400 + 25.200t &= 0 && \mid +2.174.400 \\
25.200t &= 2.174.400 && \mid : 25.200 \\
t &= \tfrac{604}{7}
\end{aligned}
$$

**►► Hinreichendes Kriterium: Art der Extrema ermitteln**

Einerseits siehst du sofort: $a''(t) = 25.200 > 0$. Also muss es sich bei den Extrema von $a$ um Minima handeln.

Eine andere Möglichkeit wäre, sich den Funktionsterm von $a'$ anzusehen: Mit $a'(t) = -2.174.400 + 25.200t$ handelt es sich bei $a'$ um eine **Gerade** mit negativem $y$-Achsenabschnitt und positiver Steigung. Diese Gerade schneidet definitiv die $x$-Achse und hat dabei einen Vorzeichenwechsel von $-$ nach $+$.

Nur beim Minimum findet ein solcher Vorzeichenwechsel der Ableitung statt.

Also ist gezeigt: Zum Zeitpunkt $t = \frac{604}{7} \approx 86,29$ kommen sich die beiden Flugzeuge am nächsten.