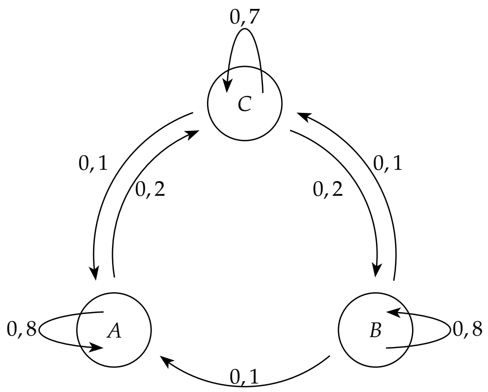
a) ▶ **Übergangsdiagramm zeichnen** (8P)



▶ **Matrix beschreiben**

Betrachte den Aufbau der Matrix:

$$\begin{array}{ccc} & \text{von:} & \begin{array}{ccc} A & \;\;B & \;\;C \end{array} \\ \text{nach:}\; \begin{array}{c} A \\ B \\ B \end{array} & P = & \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}7 \end{pmatrix} \end{array}$$

Die **Spaltenzahl** gibt an, **woher** die Quote kommt; die **Zeilenzahl** gibt an, **wohin** sie sich bewegt.

Beispiel 1: Eintrag in zweiter Spalte, erste Zeile.
0,1$\widehat{=}$ 10 % der Käufer von Sorte B wechseln zu Sorte A.

Beispiel 2:
Eintrag in erster Spalte, dritte Zeile. 0,2$\widehat{=}$ 20 % der Käufer von Sorte A wechseln zu Sorte C.

b) ▶ **Verteilung berechnen** (4P)

Die Anfangsverteilung können wir in einem Vektor darstellen: $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 150.000 \\ 300.000 \\ 450.000 \end{pmatrix}$.

Die Matrix beschreibt das **monatliche** Wechselverhalten der Kunden; wenn wir also die Matrix P auf den Vektor $\overrightarrow{v}$ anwenden, so erhalten wir die Verteilung nach einem Monat.

$$\overrightarrow{v}_1 = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 150.000 \\ 300.000 \\ 450.000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8 \cdot 150.000 + 0{,}1 \cdot 300.000 + 0{,}1 \cdot 450.000 \\ 0 \cdot 150.000 + 0{,}8 \cdot 300.000 + 0{,}2 \cdot 450.000 \\ 0{,}2 \cdot 150.000 + 0{,}1 \cdot 300.000 + 0{,}7 \cdot 450.000 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 195.000 \\ 330.000 \\ 375.000 \end{pmatrix}$$

c) ▶ **P^2 berechnen** (6P)

Nach den Regeln für die Matrix-Multiplikation folgt:

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}7 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}8^2+0+0{,}1\cdot 0{,}2 & 0{,}8\cdot 0{,}1+0{,}1\cdot 0{,}8+0{,}1^2 & 0{,}8\cdot 0{,}1+0{,}1\cdot 0{,}2+0{,}1\cdot 0{,}7 \\ 0+0+0{,}2^2 & 0+0{,}8^2+0{,}2\cdot 0{,}1 & 0+0{,}8\cdot 0{,}2+0{,}2\cdot 0{,}7 \\ 0{,}2\cdot 0{,}8+0+0{,}7\cdot 0{,}2 & 0{,}2\cdot 0{,}1+0{,}1\cdot 0{,}8+0{,}7\cdot 0{,}1 & 0{,}2\cdot 0{,}1+0{,}1\cdot 0{,}2+0{,}7^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}66 & 0{,}17 & 0{,}17 \\ 0{,}04 & 0{,}66 & 0{,}3 \\ 0{,}3 & 0{,}17 & 0{,}53 \end{pmatrix}$$

▶ Komponenten interpretieren

Wir können zunächst die Bedeutung von P^2 an sich im Sachzusammenhang interpretieren: P^2 gibt das **zweimonatige** Wechselverhalten der Kunden an; wir können mit dieser Matrix also berechnen, wie sich eine Verteilung nach **zwei Monaten** entwickelt hat.

Für die Bedeutung der Komponente 0,3 in der dritten Zeile der ersten Spalte, gilt: 30 % der Käufer der Sorte A haben zwei Monate später zur Sorte C gewechselt.

Für die Bedeutung der Komponente 3,3 in der dritten Zeile der ersten Spalte, gilt: 53 % der Käufer der Sorte C kaufen zwei Monate später immer noch den selben Kaffee.

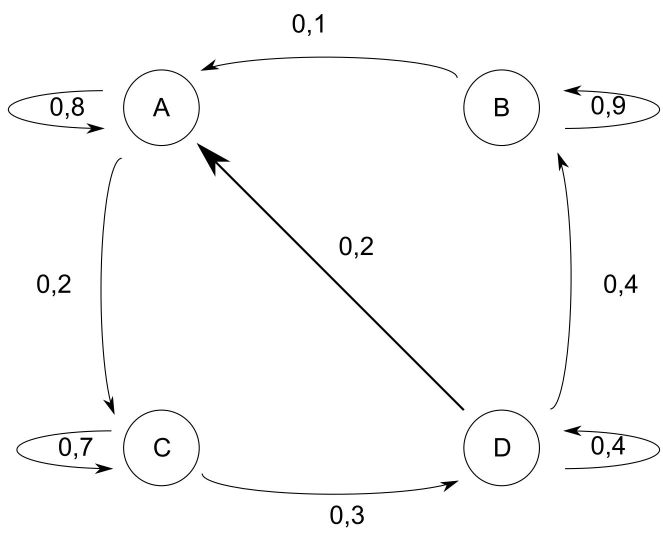
d) **▶ Eigenschaft interpretieren** (6P)

Die Nummer der Spalte sagt etwas darüber aus, **woher** die Quote kommt. Da die Spaltensumme jeweils 1 ist, heißt das: 100 % der Käufer einer Kaffeesorte bleiben auch Käufer einer drei Kaffeesorten. Sie wechseln nur hin und her. Die **Anzahl** der Kunden bleibt von Monat zu Monat gleich, es kommen weder dazu noch, fallen welche aus dem System heraus.

▶ Angemessenheit beurteilen

Zum Rechnen und Modellieren mag dieses Modell günstig sein, zur Realitätsbeschreibung allerdings nicht. Es ist viel zu wahrscheinlich, dass neue Kunden hinzukommen, oder Kunden ganz verloren gehen, als dass ein solch statisches und geschlossenes Modell das Wechselverhalten der Kunden angemessen beschreiben könnte.

e) (1) **▶ Übergangsgraphen zeichnen** (16P)



(2) ► **Verteilung bestimmen, die gleich bleibt**

Sei $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} v_A \\ v_B \\ v_C \\ v_D \end{pmatrix}$ unsere Anfangsverteilung in **Prozent**, d.h. für alle vier Einträge gilt:

$0 \leq v_{A,B,C,D} < 1$.

Die Verteilung soll nach einem Monat gleich bleiben; es muss also gelten:

$$Q \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 & 0 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}9 & 0 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0 & 0{,}7 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}3 & 0{,}4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_A \\ v_B \\ v_C \\ v_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8v_A + 0{,}1v_B + 0{,}2v_D \\ 0{,}9v_B + 0{,}4v_D \\ 0{,}2v_A + 0{,}7v_C \\ 0{,}3v_C + 0{,}4v_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_A \\ v_B \\ v_C \\ v_D \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich ein lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{llllllll}
(1) & 0{,}8v_A & + & 0{,}1v_B & & + 0{,}2v_D & = v_A & \mid -v_A \\
(2) & & & 0{,}9v_B & & + 0{,}4v_D & = v_B & \mid -v_B \\
(3) & 0{,}2v_A & & & + 0{,}7v_C & & = v_C & \mid -v_C \\
(4) & & & & 0{,}3v_C & + 0{,}4v_D & = v_D & \mid -v_D \\
\hline
(1) & -0{,}2v_A & + & 0{,}1v_B & & + 0{,}2v_D & = 0 & \\
(2) & & & -0{,}1v_B & & + 0{,}4v_D & = 0 & \\
(3) & 0{,}2v_A & & & - 0{,}3v_C & & = 0 & \\
(4) & & & & 0{,}3v_C & - 0{,}6v_D & = 0 &
\end{array}$$

Aus (4) folgt: $\quad v_C = 2v_D$. $\quad$ Eingesetzt in (3) ergibt das:

(3): $0{,}2v_A - 0{,}6v_D = 0 \;\Leftrightarrow\; v_A = 3v_D$

Aus (2) folgt: $\quad v_B = 4v_D$.

Setze zuletzt v_B und v_A ein in (1):

(1): $-0{,}6v_D + 0{,}4v_D + 0{,}2v_D = 0 \;\Leftrightarrow\; 0 = 0$.

Das Gleichungssystem ist **unterbestimmt**.

Setze $k = v_D$. Wir erhalten dann den Lösungsvektor: $\overrightarrow{v} = k \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Nun soll eine **prozentuale** Verteilung angegeben werden.

Für $k = \frac{1}{10}$ ergibt sich hier z.B.: $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} 0{,}3 \\ 0{,}4 \\ 0{,}2 \\ 0{,}1 \end{pmatrix}$.

► **Verteilung interpretieren**

Die Verteilung bleibt **gleich**, d.h. langfristig wird sich eine Verteilung einpendeln, bei der 30 % der Käufer Sorte A, 40 % der Käufer Sorte B, 20 % der Käufer Sorte C und 10 % der Käufer Sorte D kaufen.

f) (1) ► **Begründen, warum das Verhalten durch Q' beschrieben werden kann** (10P)

Der Aufgabenstellung kannst du entnehmen, dass nur Käufer der Kaffeesorte C ihr Wechselverhalten ändern, daher unterscheidet sich die neue Matrix Q' nur in der dritten Spalte von der ursprünglichen Matrix Q. Die neuen Wechselquoten von der Kaffeesorte C zu A, B und D werden durch die Variablen x, y und z ersetzt. Die Quote der Kunden, welche weiterhin bei der Kaffeesorte C bleiben ist demnach: $1-(x+y+z)$.

(2) ► **Ermitteln der neuen Übergangsquoten**

Dir ist die Verteilung $\overrightarrow{v}$ aus dem Monat gegeben, indem sich die Verteilung ändert und die Verteilung $\overrightarrow{v}_1$ nach diesem Monat. Um jetzt die neuen Übergangsquoten zu berechnen, musst du diese Gleichung lösen:

$$\overrightarrow{v}_1 = Q^* \cdot \overrightarrow{v}$$

$$\begin{pmatrix} 400.000 \\ 300.000 \\ 200.000 \\ 200.000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 & x & 0,2 \\ 0 & 0,9 & y & 0,4 \\ 0,2 & 0 & 1-(x+y+z) & 0 \\ 0 & 0 & z & 0,4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 400.000 \\ 200.000 \\ 400.000 \\ 100.000 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 400.000 \\ 300.000 \\ 200.000 \\ 200.000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 \cdot 400.000 + 0,1 \cdot 200.000 + x \cdot 400.000 + 0,2 \cdot 100.000 \\ 0,9 \cdot 200.000 + y \cdot 400.000 + 0,4 \cdot 100.000 \\ 0,2 \cdot 400.000 + (1-x-y-z) \cdot 400.000 \\ z \cdot 400.000 + 0,4 \cdot 100.000 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 400.000 \\ 300.000 \\ 200.000 \\ 200.000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 360.000 - x \cdot 400.000 \\ 220.000 + y \cdot 400.000 \\ 80.000 + 400.000 - (x+y+z) \cdot 100.000 \\ 40.0000 + z \cdot 100000 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 400.000 \\ 300.000 \\ 200.000 \\ 200.000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 360.000 \\ 220.000 \\ 480.000 \\ 40.000 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \cdot 400.000 \\ y \cdot 400.000 \\ -(x+y+z) \cdot 400.000 \\ z \cdot 400.000 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 40.000 \\ 80.000 \\ -280.000 \\ 160.000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cdot 400.000 \\ y \cdot 400.000 \\ -(x+y+z) \cdot 400.000 \\ z \cdot 400.000 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt: $x = 0{,}1, \quad y = 0{,}2, \quad z = 0{,}4$.
Setze diese Werte ein in die erste Zeile, um sie auf ihre Richtigkeit zu prüfen:

$-280.000 = -400.000 \cdot (0{,}7) = -280.000$: wahre Aussage.

Damit folgt die neue Übergangsmatrix $Q^* = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,1 & 0,1 & 0,2 \\ 0 & 0,9 & 0,2 & 0,4 \\ 0,2 & 0 & 0,3 & 0 \\ 0 & 0 & 0,4 & 0,4 \end{pmatrix}$.