Analysis 1.2

Aufgabe 1.2: Fischmobile

a)

▶ Verhalten der Funktionswerte von f

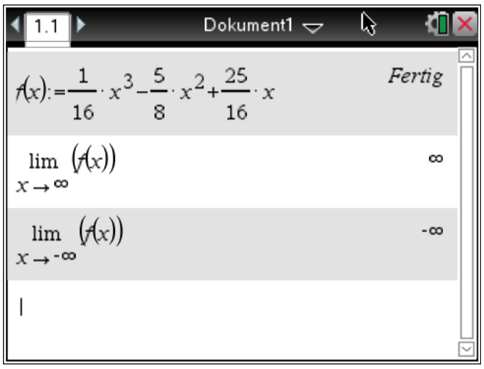
Da die Gleichung der Funktion f mit $f(x)=\frac{1}{16}x^3-\frac{5}{8}x^2+\frac{25}{16}x$ eine ganzrationale Funktion dritten Grades ist und die Zahl vor dem größten Exponenten positiv ist, gilt:

für $x\to-\infty$ geht $f(x)\to-\infty$ und

für $x\to\infty$ geht $f(x)\to\infty$

Eine andere Möglichkeit wäre, die Grenzwerte der Funktion zu berechnen. Dazu definierst du die Funktion f in deinem CAS und berechnest anschließend den Limes.

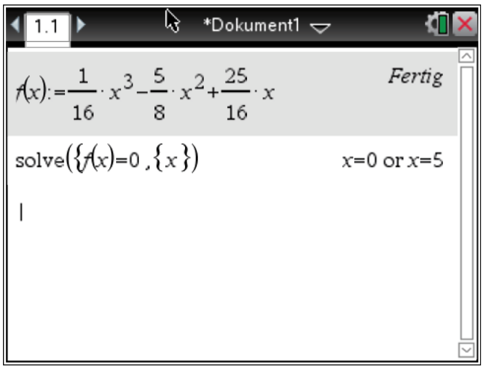
menu $\to$ 4: Analysis $\to$ 4: Limes



▶ Nullstellen berechnen

Um die Nullstellen zu berechnen muss $f(x)=0$ sein. Diese Gleichung kannst du mit deinem CAS lösen.

menu $\to$ 3: Algebra $\to$ 7: Gleichungssystem lösen… $\to$ 1:Gleichungssystem lösen…



Die erste Nullstelle liegt bei $x=0$ und die zweite bei $x=5$.

Die Koordinaten der Nullstellen lauten also: $\boldsymbol{N_1(0\mid 0)}$ und $\boldsymbol{N_2(5\mid 0)}$.

▶ Begründen, dass Graph von f nicht achsensymmetrisch ist

Ein Graph einer ganzrationalen Funktion kann nur dann achsensymmetrisch zur y-Achse verlaufen, wenn alle Exponenten geradzahlig sind. In der Funktionsgleichung von f sind zwei Summanden, die keinen geradzahligen Exponenten haben: $\frac{1}{16}x^3$ und $\frac{25}{16}x^1$.

Somit kann der Graph der Funktion f nicht achsensymmetrisch zur y-Achse sein.

Dass der Graph der Funktion nicht achsensymmetrisch ist, kannst du auch mit den ersten beiden Aufgabenteilen begründen. Die beiden Nullstellen und die beiden Grenzwerte deuten schon darauf hin, dass die Funktion nicht achsensymmetrisch sein kann, denn sonst müsste die y-Achse genau zwischen den beiden Nullstellen liegen.

b)

▶ lokale Extrempunkte berechnen

Wende zur Berechnung der lokalen Extrempunkte die beiden Bedingungen an:

Notwendige Bedingung: $f'(x_E)=0$

Hinreichende Bedingung:

$f''(x_E)>0 \Rightarrow$ bei x_E befindet sich ein Tiefpunkt

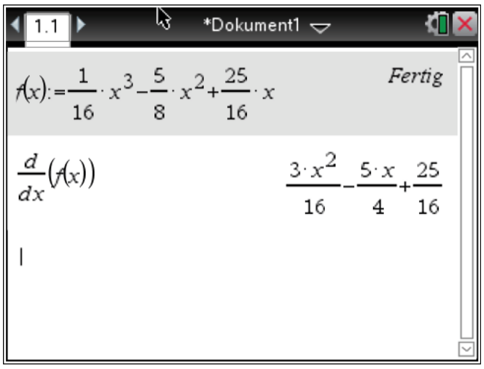
$f''(x_E)<0 \Rightarrow$ bei x_E befindet sich ein Hochpunkt

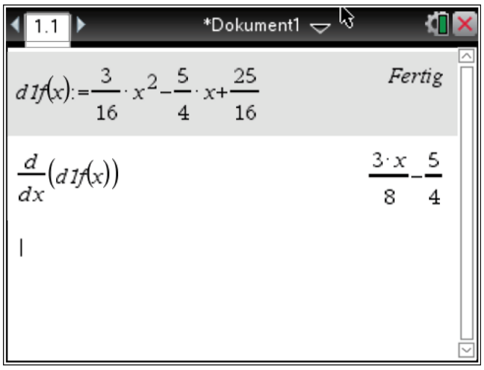
Bilde also als erstes die erste und zweite Ableitung der Funktion f.

1. Schritt: Ableitungen bilden

Berechne die erste und zweite Ableitung mit deinem CAS.

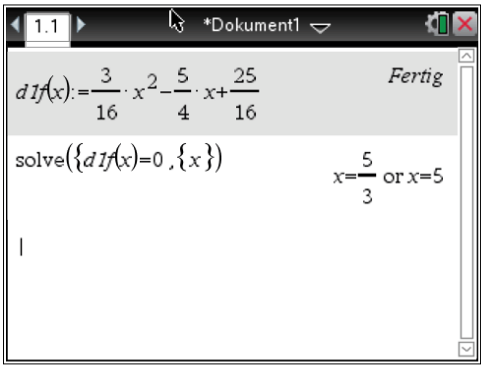
menu $\to$ 4: Analysis $\to$ 1: Ableitung





2. Schritt: Notwendige Bedingung anwenden

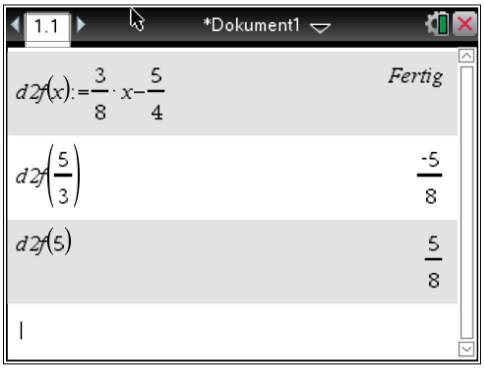
Durch Gleichsetzen von f mit 0 erhälst du die möglichen Extremstellen x_E von f. Löse mit deinem CAS die Gleichung $f'(x)=0$.



$x_{E_1}=5$ und $x_{E_2}=\frac{5}{3}$

3. Schritt: Hinreichende Bedingung überprüfen

Einsetzen von $x_{E_1}=5$ und $x_{E_2}=\frac{5}{3}$ in die zweite Ableitung liefert:

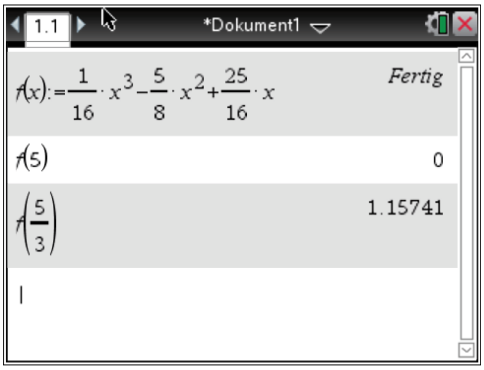


Da $\frac{5}{8}>0$ ist, hat der Graph der Funktion f an der Stelle $x_{E1}=5$ ein lokales Minimum.

Da $-\frac{5}{8}<0$ hat der Graph der Funktion f an der Stelle $x_{E2}=\frac{5}{3}$ ein lokales Maximum.

4. Schritt: y-Koordinaten berechnen

Setzte die berechneten x-Werte in die Funktion f ein.



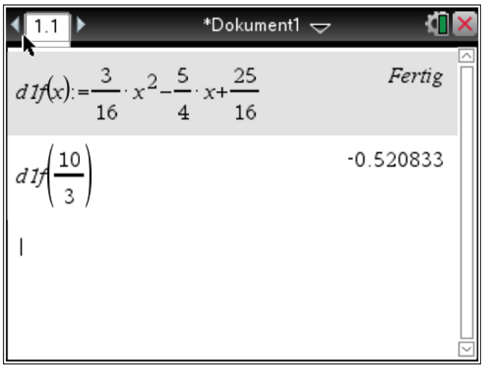
Mit der notwendigen und hinreichenden Bedingung für Extremstellen ergibt sich, dass der Graph der Funktion f einen **Tiefpunkt** im Punkt $\boldsymbol{T(5 \mid 0)}$ und einen **Hochpunkt** im Punkt $\boldsymbol{H\left(\frac{5}{3} \mid 1,16\right)}$ hat.

▶ Steigungswinkel berechnen

Die Größe eines Steigungswinkel einer Tangente in einem Punkt kannst du mit Hilfe der Steigung des Graphen berechnen. Die Steigung des Graphen von f wird ja gerade durch die erste Ableitung von $f(x)$ beschrieben. Die Steigung im Wendepunkt kannst du berechnen, indem du den x-Wert des Wendepunkts in die erste Ableitung von f einsetzt. Die Größe des Steigungswinkel kannst du mit dem Tangens $\tan\alpha = m_w$ berechnen.

1. Schritt: Steigung berechnen

$m_w = f'\left(\frac{10}{3}\right)$



2. Schritt: Steigungswinkel berechnen

$$\begin{aligned} \tan\alpha &= -0,521 \quad |\tan^{-1} \\ \alpha &= -27,52 \end{aligned}$$

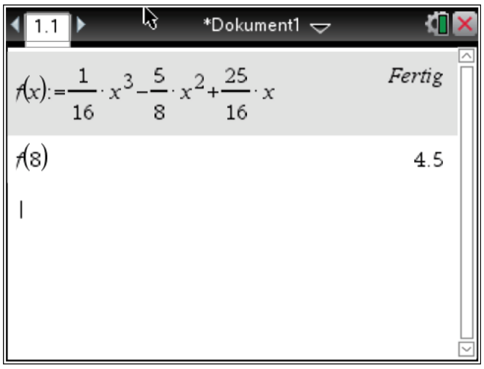
Da das Ergebnis eine negative Zahl ist, weißt du, dass der gesuchte Winkel ein stumpfer Winkel ist. Um die richtige Größe des Winkels zu berechnen, musst du noch 180° addieren.

$\alpha = -27,52^\circ + 180^\circ = 152,52^\circ.$

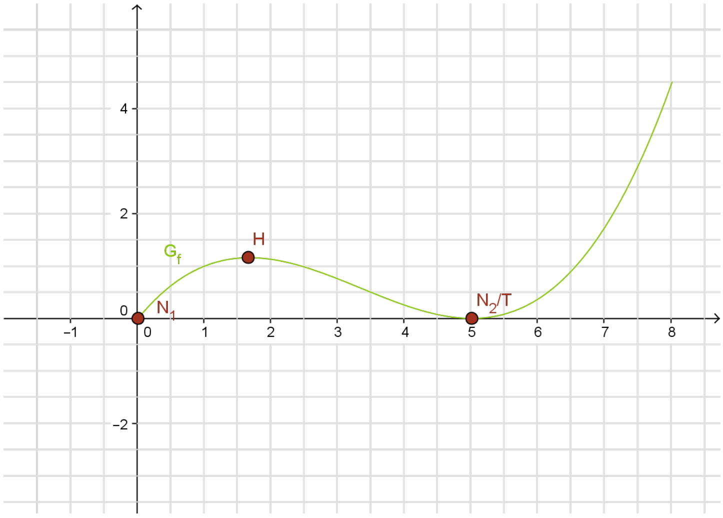
Die Größe des Steigungswinkel der Wendetangente beträgt $\boldsymbol{\alpha = 152,52^\circ}$.

▶ Grapf der Funktion f skizzieren

Berechne als erstes $f(8)$ mit deinem CAS.



Trage die beiden Nullpunkte, den Hochpunkt, den Tiefpunkt (gleich dem zweiten Nullpunkt) und den Endpunkt der Funktion f in das Koordinatensystem ein und skizziere mit Hilfe dieser Punkte den Graphen G_f der Funktion f.



c)

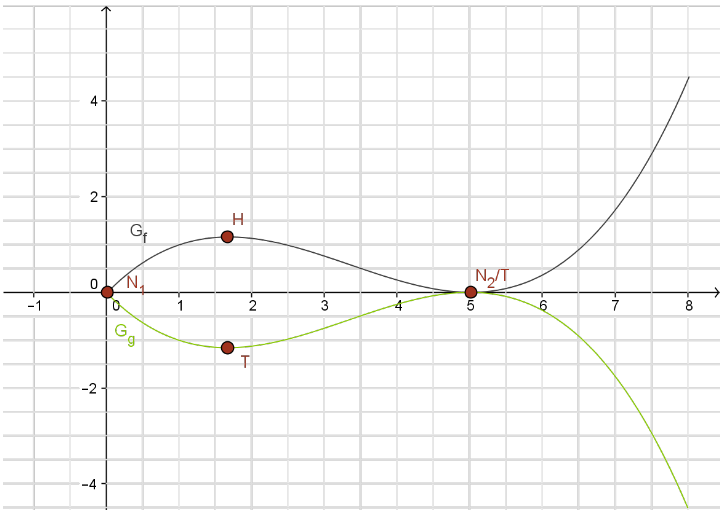
▶ **Graphen der Funktion f spiegeln**

In dieser Aufgabe sollst du die Funktionsgleichung von g angeben. Die gesuchte Gleichung der Funktion g erhälst du, indem du die Gleichung der Funktion f mit -1 multiplizierst, dadurch wird der Graph der Funktion f an der x-Achse gespiegelt.

$g(x)=-f(x)=-\frac{1}{16}\cdot x^3+\frac{5}{8}\cdot x^2-\frac{25}{16}\cdot x$

▶ **Graphen G_g skizzieren**

Die Nullstellen der beiden Graphen sind gleich. Der Hochpunkt des Graphen G_f ist im Graphen G_g ein Tiefpunkt mit den Koordinaten $T\left(\frac{5}{3}\mid -1,16\right)$. Mit diesen Angaben kannst du den Graphen G_g skizzieren.



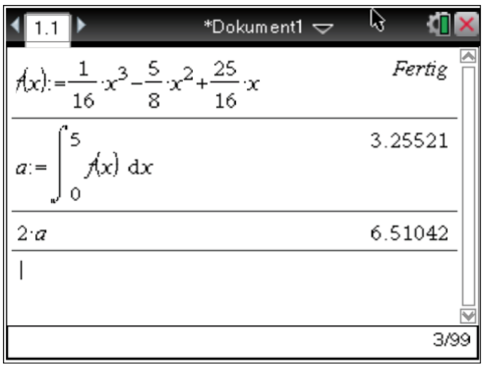
d)

▶ **Zeige, dass der Flächeninhalte des Körpers und der Schwanzflosse des Fisches für $b = 2,8$ cm, gleich sind.**

Flächeninhalt des Körpers berechnen

Berechne zuerst den Flächeninhalt des Körpers des Fisches. Der Flächeninhalt des Fisches wird durch die x-Achse in zwei gleichgroße Teilflächen geteilt. Die obere Fläche ist gerade die, die durch den Graph von f und der x-Achse eingeschlossen wird. Du kannst also das Integral mit den Grenzen 0 und 5 (die beiden Nullpunkt) berechnen und diesen Flächeninhalt dann mit 2 multiplizieren. Das Integral kannst du mit deinem CAS berechnen.

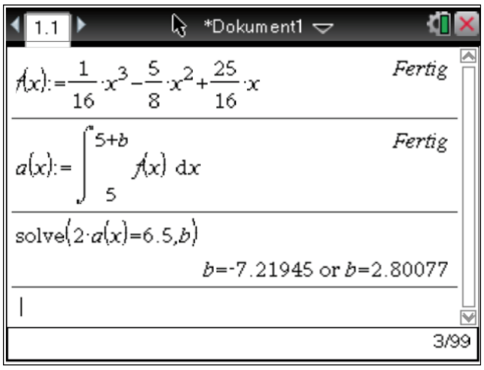
menu → 4: Analysis → 3: Integral



Der Flächeninhalt des Körper beträgt ungefähr $6,5\text{cm}$.

Breite b der Schwanzflosse bestimmen

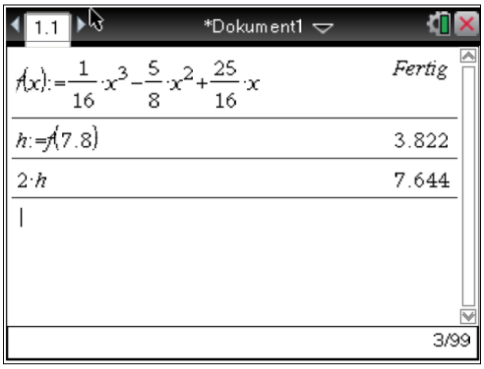
Den Flächeninhalt der Schwanzflosse wird auch durch die x-Achse in zwei gleichgroße Flächen geteilt. Der Flächeninhalt oberhalb der x-Achse soll durch den Nullpunkt $N(5 \mid 0)$ und die Breite b beschränkt werden. Der x-Wert der das Ende der Schwanzflosse beschreibt ist somit $x = 5 + b$. Du kannst das Integral mit den Grenzen 5 und $5 + b$ mit deinem CAS berechnen. b erhälst du dann, indem du die Gleichung löst, dass zwei mal das berechnete Integral $6,5\text{cm}$ ist.



Mit Hilfe der Skizze siehst du, dass die Breite b ein positiver Wert sein muss, da die die Schwanzflosse des Fisches auf der positive x-Achse liegt. Für die Breite $b = 2,8\text{cm}$ der Schwanzflosse sind die beiden Flächeninhalte auf Zehntel gerundet gleich.

▶ Höhe der Schwanzflosse berechnen

Die Schwanzflosse soll $2,8$cm breit sein, der x-Wert ist somit $x = 7,8$. Die Höhe erhälst du dann, indem du den x-Wert in die Funktionsgleichung von f einsetzt. Beachte auch hier, dass die Höhe der Schwanzflosse durch die x-Achse in der Hälfte geteilt wird. Um also die Höhe zu berechnen, musst du das Ergebnis noch mit 2 multiplizieren.

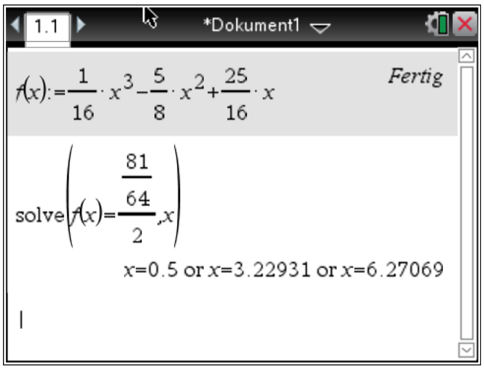


Da eine Längeneinheit einem Zentimeter entspricht, ist die Höhe der Schwanzflosse $\mathbf{7,6}$ **cm**.

e)

▶ Koordinaten des Auges bestimmen

Aus der Aufgabenstellung kannst du entnehmen, dass das Auge auf dem Mittelpunkt einer $\frac{81}{64}\text{cm}$ langen Strecke liegt, die parallel zur y-Achse verläuft und die Anfangs- und Endpunkt auf den Graphen G_f und G_g liegen. Da die x-Achse den Fisch genau in der Mitte teilt, muss das Auges auf der x-Achse liegen, die y-Koordinate muss also Null sein. Die x-Koordinate erhälst du, indem du berechnest, an welcher Stelle die Hälfte der Strecke die Funktion f (oder g) berührt (schneidet). Löse mit deinem CAS also die Gleichung: $f(x) = \frac{81}{64} : 2$.



Da das Auge im Intervall $[0;3]$ liegt, ist die x-Koordinate $0,5$.

Das Auge des Fisches liegt im Punkt $\boldsymbol{(0,5\mid 0)}$.

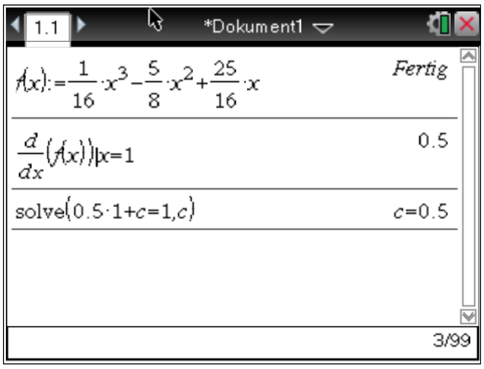
f)

▶ Flächeninhalt der Grundfläche der Schachtel ermitteln

Den Flächeninhalt der Schachtel wird durch die Tangenten an die Graphen G_f und G_g in den Punkten $T_1(1\mid 1)$ und $T(1\mid -1)$ und der Geraden h auf der das Ende der Schwanzflosse liegt, begrenzt. Berechne zuerst eine der beiden Tangenten und die Schnittpunkte der Tangenten mit der x-Achse. Anschließend kannst du die Schnittpunkte der beiden Tangenten mit der Geraden h berechnen. Du erhältst drei Punkte. Der Flächeninhalt des Dreiecks ist dann gerade der Abstand zwischen den beiden Schnittpunkten der Geraden h und der Tangenten und die Höhe ist die Länge des Fisches ($7,8$ cm) und dazu musst du dann noch den Abstand des Schnittpunktes mit der x-Achse bis zum Ursprung addieren.

1. Schritt: Tangenten berechnen

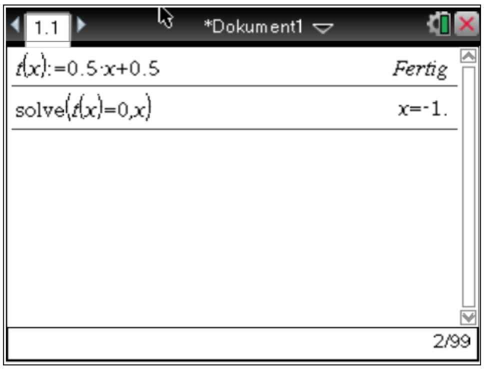
Bestimme dazu als erstes mit deinem CAS die Steigung im Punkt $T_1(1\mid 1)$ und berechne den Parameter c indem du die Koordinaten des Punktes T_1 in die Tangentengleichung einsetzt und die Gleichung nach c auflöst.



$t: y = 0,5x + 0,5.$

2. Schritt: Schnittpunkt mit der x-Achse

Den Schnittpunkt mit der x-Achse kannst du mit deinem CAS die Gleichung $0 = 0,5x + 0,5$ löst.



Die Tangente schneidet die x-Achse im Punk $Q(-1 \mid 0)$.

3. Schritt: Schnittpunkt der Tangente mit der Geraden h berechnen

$h := 7,8$

$y = 0,5 \cdot 7,8 + 0,5 = 4,4$

Die Tangente schneidet die Gerade $x = 7,8$ im Punkt $R(7,8 \mid 4,4)$.

4. Schritt: Fläche berechnen

Die Grundseite des Dreiecks beträgt somit: $g = 2 \cdot y_R = 2 \cdot 4,4 = 8,8$

Höhe des Dreiecks:

$h = 1 + 7,8 = 8,8$LE.

$A = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{g} \cdot \mathrm{h} = \frac{1}{2} \cdot 8,8 \cdot 8,8 = 38,72$ FE.

Da eine Längeneinheit einem Zentimeter entspricht, beträgt der Flächeninhalt der Grundseite der Schachtel rund $\mathbf{39cm^2}$.