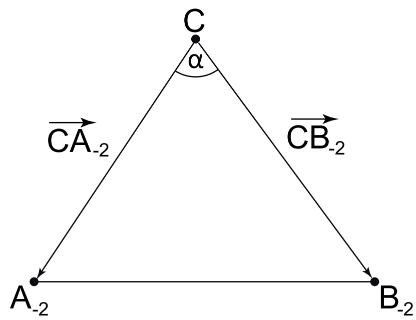
a) (1) ► **Berechnen der Größe des Innenwinkels $\sphericalangle A_{-2}CB_{-2}$** (7P)

Der Aufgabenstellung kannst du entnehmen, dass die Punkte A_{-2}, B_{-2} und C, mit:

- $A_{-2}(5 \mid -5 \mid -1)$,
- $B_{-2}(-1 \mid 2 \mid -3)$ und
- $C(-1 \mid 1 \mid -1)$

ein Dreieck bilden.

Deine Aufgabe ist es nun, den Innenwinkel $\sphericalangle A_{-2}CB_{-2}$ des Dreiecks $A_{-2}B_{-2}C$ zu berechnen. Den Innenwinkel $\sphericalangle A_{-2}CB_{-2}$ bezeichnen wir im Folgenden mit α. Der Abbildung rechts kannst du entnehmen, dass dieser Winkel α von den Vektoren $\overrightarrow{CA_{-2}}$ und $\overrightarrow{CB_{-2}}$ eingeschlossen wird. Hier gilt es also, einen Winkel zwischen zwei Vektoren zu berechnen. Den Winkel α zwischen zwei beliebigen Vektoren $\overrightarrow{u}$ und $\overrightarrow{v}$ berechnest du dabei wie folgt:



$$\cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{u} \circ \overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}|}.$$

(2) ► **Untersuchen, ob die Punkte A_{-3}, B_{-3} und C Eckpunkte eines Dreiecks sind**

Nun sollst du untersuchen, ob die Punkte A_{-3}, B_{-3} und C, gegeben mit

- $A_{-3}(5 \mid -8 \mid -1)$,
- $B_{-3}(-1 \mid 2 \mid -5)$ und
- $C(-1 \mid 1 \mid -1)$,

ein Dreieck bilden. Beim Lösen dieser Aufgabe werden zwei Lösungswege behandelt.

Beim Lösungsweg A überprüfst du, ob die Punkte A_{-3}, B_{-3} und C auf einer gemeinsamen Geraden g liegen. Tun sie das, so hast du gezeigt, dass es sich bei den Punkten A_{-3}, B_{-3} und C nicht um Eckpunkte eines Dreiecks handelt. Definiere dazu eine Gerade mit zwei der gegebenen Punkte und überprüfe über eine Punktprobe, ob der letzte nicht verwendete Punkt auch auf eben dieser Geraden liegt.

Beim Lösungsweg B überprüfst du hingegen, ob die Kantenvektoren $\overrightarrow{A_{-3}B_{-3}}$, $\overrightarrow{B_{-3}C}$ und $\overrightarrow{CA_{-3}}$ des Dreiecks kollinear bzw. parallel zueinander verlaufen. Verlaufen nämlich 2 dieser Kantenvektoren parallel zueinander, so handelt es sich hier nicht um ein Dreieck, da Dreiecke niemals parallele Seiten besitzen.

b) (1) ► **Aufstellen einer Gleichung für die Geradenschar f_m** (6P)

Der Aufgabenstellung kannst du entnehmen, dass die Geraden der Schar g_m durch den Punkt C und die Punkte A_m verlaufen, während die Geraden der Schar h_m ebenfalls durch Punkt C und durch die Punkte B_m verlaufen.

Deine Aufgabe ist es nun, eine Gleichung der Geradenschar f_m aufzustellen. Die Geraden der Geradenschar f_m sollen dabei ebenfalls durch den Punkt C und zusätzlich sollen diese noch sowohl zu g_m als auch zu h_m orthogonal verlaufen.

Vervielfältigung nur innerhalb einer Lehrer-/Klassen- oder Schullizenz und mit Hinweis auf MatheLV erlaubt.

Bevor du also eine Gleichung der Geradenschar f_m bestimmen kannst, bestimmst du jeweils eine Gleichung für die Geradenschar g_m und h_m. Hierbei kannst du diese so zusammensetzen:

- Geradenschar g_m: Stützvektor $\overrightarrow{OC}$ und Richtungsvektor $\overrightarrow{CA_m}$.
- Geradenschar h_m: Stützvektor $\overrightarrow{OC}$ und Richtungsvektor $\overrightarrow{CB_m}$.

Da die Geraden der Geradenschar f_m ebenfalls durch Punkt C verlaufen sollen, kann der Ortsvektor $\overrightarrow{OC}$ von C für diese Geradenschar ebenfalls als Stützvektor fungieren. Den Richtungsvektor von f_m musst du dann so bestimmen, dass dieser orthogonal zu den Richtungsvektoren der Geraden g_m und h_m verläuft. Bestimme diesen über die Tatsache, dass die Skalarprodukte von Vektoren, welche orthogonal zueinander verlaufen, sich zu Null ergeben. Bilde also das Skalarprodukt des unbekannten Richtungsvektors von f_m mit den Richtungsvektoren der Geraden g_m und h_m. Löse dann das resultierende unterbesetzte LGS, um den Richtungsvektor von f_m bestimmen zu können.

(2) ▶ **Prüfen, ob Geraden f_m existieren die parallel zur $y-z-$Ebene verlaufen**

Nun sollst du überprüfen, ob Geraden der Schar f_m existieren, welche parallel zur $y-z-$Ebene verlaufen. Das heißt du überprüfst, ob m so bestimmt werden kann, dass die entsprechende Gerade f_m parallel zur $y-z-$Ebene verläuft. Verläuft eine Gerade parallel zu einer Ebene, so verlaufen der Normalenvektor der Ebene und der Richtungsvektor der Geraden orthogonal zueinander. Vektoren verlaufen dabei genau dann orthogonal zueinander, wenn deren zugehöriges Skalarprodukt sich zu Null ergibt.

Gehe hier also so vor:

- Bestimme den Normalenvektor $\overrightarrow{n_{yz}}$ der $y-z-$Ebene.
- Bilde das Skalarprodukt von $\overrightarrow{n_{yz}}$ und dem Richtungsvektor von f_m.
- Untersuche, ob hier ein m so gefunden werden kann, dass dieses sich zu Null ergibt.

(3) ▶ **Prüfen, ob Geraden f_m existieren die parallel zur $z-$Achse verlaufen**

Hier sollst du nun überprüfen, ob es Geraden f_m gibt, die parallel zur $z-$Achse verlaufen. Bestimme dazu zunächst jenen Vektor, welcher die Richtung der $z-$Achse beschreibt. Hast du diesen bestimmt, dann führe dir vor Augen, dass Geraden dann parallel verlaufen, wenn ihre Richtungsvektoren kollinear bzw. parallel verlaufen. Weiterhin verlaufen Vektoren nur dann parallel bzw. kollinear, wenn der eine Vektor ein Vielfaches des anderen Vektors darstellt.

Gehe beim Lösen dieser Aufgabe also so vor:

- Bestimme den Vektor, welcher die Richtung der $z-$Achse beschreibt.
- Überprüfe ob die Gleichung $\vec{n} = k \cdot \vec{u}$ eine nicht triviale Lösung hat.
- Überprüfe, ob das resultierende Gleichungssystem lösbar ist und bestimme gegebenenfalls die zugehörigen Werte von m

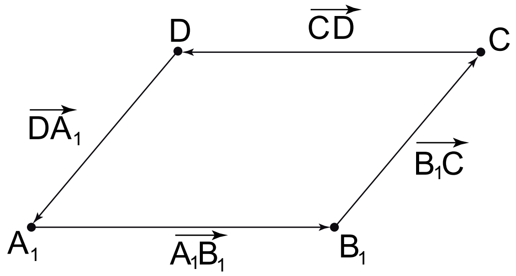
Vervielfältigung nur innerhalb einer Lehrer-/Klassen- oder Schullizenz und mit Hinweis auf MatheLV erlaubt.

c) (1) ► **Ermitteln der Koordinaten von Punkt D des Parallelogramms A_1B_1CD** (10P)

Nun betrachten wir das Parallelogramm A_1B_1CD mit:
$A_1(5 \mid 4 \mid -1)$, $B_1(-1 \mid 2 \mid 3)$, $C(-1 \mid 1 \mid -1)$ und D unbekannt.
Hier ist es deine Aufgabe, die Koordinaten von D zu bestimmen. Da die Reihenfolge der Punkte A_1, B_1, C und D mit A_1B_1CD im Parallelogramm festgelegt ist, gibt es für Punkt D nicht mehrere Lösungen, sondern genau eine. Da es sich bei A_1B_1CD um ein Parallelogramm handelt, besitzt dieses Viereck diese zwei besonderen Eigenschaften:

- Die gegeben überliegenden Seiten sind **parallel** und **gleich lang**

Beim Lösen dieser Aufgabe kann es sinnvoll sein, das Parallelogramm zu skizzieren. Trage in deine Skizze neben den Punktbezeichnungen auch die Bezeichnungen für die jeweiligen Vektoren ein, welche die Kanten des Parallelogramm beschreiben (siehe rechts).



Der Skizze kannst du entnehmen, dass offensichtlich folgende Beziehungen zwischen den Vektoren im Parallelogramm vorliegen:

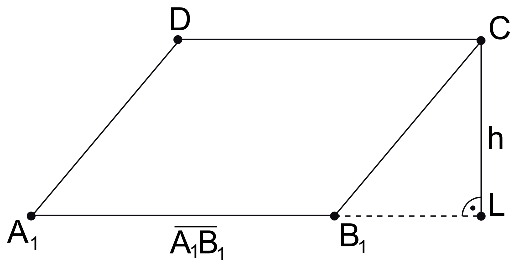
- $\overrightarrow{A_1B_1} = -\overrightarrow{CD}$
- $\overrightarrow{B_1C} = -\overrightarrow{DA_1}$

Bestimme über diese Zusammenhänge und den Koordinaten der Punkte A_1, B_1 und C die gesuchten Koordinaten von D.

(2) ► **Berechnen der Höhe des Parallelogramm**

Nun sollst du die Höhe des obigen Parallelogramms berechnen.

Die Höhe h des Parallelogramms entspricht hier dem Abstand zwischen den Seiten $\overline{A_1B_1}$ und $\overline{CD}$ des Parallelogramm (siehe rechts). Das bedeutet, dass Höhe h senkrecht auf $\overline{A_1B_1}$ und $\overline{CD}$ steht. Willst du die Länge der Höhe h berechnen, so fällst du z.B. von Punkt C aus ein Lot auf die Kante $\overline{A_1B_1}$.



Willst du die Länge der Höhe h dann berechnen, so bestimmst du zunächst die Koordinaten des Lotfußpunktes L, der durch das Fällen des Lotes von C aus auf $\overline{A_1B_1}$ entsteht. Hast du die Koordinaten von L ermittelt, so berechnest du die Länge des Vektors $\overrightarrow{CL}$ und hast somit die gesuchte Länge der Höhe h bestimmt.

Vervielfältigung nur innerhalb einer Lehrer-/Klassen- oder Schullizenz und mit Hinweis auf MatheLV erlaubt.

Gehe dabei so vor:

- Definiere eine Hilfsebene H. Diese Hilfsebene H verläuft senkrecht zur Kante $\overline{A_1B_1}$ und durch den Punkt C. Bestimme eine Gleichung dieser Ebene in Koordinatenform.
- Beschreibe die Kante $\overline{A_1B_1}$ durch eine Gerade $g_{A_1B_1}$.
- Bestimme die Koordinaten des Schnittpunkts von Gerade $g_{A_1B_1}$ und Hilfsebene H. Der Schnittpunkt von $g_{A_1B_1}$ und H entspricht dann dem gesuchten Lotfußpunkt.
- Ermittle mit den Koordinaten von S die gesuchte Länge der Höhe h.

(3) ▶ **Bestimmen der Koordinaten der Endpunkte der Strecken**

Der Aufgabenstellung kannst du nun entnehmen, dass vom Punkt C aus Strecken gezeichnet werden, deren Endpunkte P_S auf der Geraden $g_{A_1B_1}$ liegen. Deine Aufgabe ist es nun, die Koordinaten der Endpunkt der Strecken zu berechnen, welche mit der Strecke $\overline{CA_1}$ bei C einen Winkel von $30\,°$ einschließen.

Das heißt, der Endpunkt P_S der behandelten Strecken liegt irgendwo auf der Geraden $g_{A_1B_1}$. Diese Gerade $g_{A_1B_1}$ hast du oben schon bestimmt, deren Gleichung war:

$$g_{A_1B_1}: \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Da der Punkt P_S irgendwo auf der Geraden $g_{A_1B_1}$ liegen soll, besitzt dieser in Abhängigkeit von s folgenden Ortsvektor bzw. Koordinaten:

$$\overrightarrow{OP_s} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-6\cdot s \\ 4-2\cdot s \\ -1+4\cdot s \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad P_s(5-6\cdot s \mid 4-2\cdot s \mid -1+4\cdot s).$$

Die Koordinaten von P_s sollst du nun so anpassen, dass die Strecke $\overline{CP_S}$ mit der Strecke $\overline{CA_1}$ bei C einen Winkel von $30\,°$ einschließt. Dabei kannst du die Strecken $\overline{CP_S}$ und $\overline{CA_1}$ mit den Vektoren $\overrightarrow{CP_S}$ und $\overrightarrow{CA_1}$ beschreiben, wobei für den Winkel α zwischen zwei Vektoren gilt (siehe a):

$$\cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{u} \circ \overrightarrow{v}}{|\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}|}.$$

Willst du nun die Koordinaten von P_s bestimmen, dann gehe hier so vor:

- Bilde die Vektoren $\overrightarrow{CP_s}$ und $\overrightarrow{CA_1}$.
- Setze $\alpha = 30\,°$, $\overrightarrow{CP_s}$ und $\overrightarrow{CA_1}$ in die Formel für den Winkel α ein.
- Löse die resultierende Gleichung nach s.
- Bestimme die Koordinaten von P_s

Vervielfältigung nur innerhalb einer Lehrer-/Klassen- oder Schullizenz und mit Hinweis auf MatheLV erlaubt.

d) ▶ **Zeigen, dass ein $m \in \mathbb{R}$ existiert, so dass der Flächeninhalt des Quadrates extremal wird** (3P)

Der Aufgabenstellung kannst du entnehmen, dass die Punkte A_m und B_m, mit
$A_m(5 \mid 3 \cdot m + 1 \mid -1)$ und $B_m(-1 \mid 2 \mid 2 \cdot m + 1)$,
nun die Eckpunkte eines Quadrates sein sollen. Deine Aufgabe ist es dabei zu zeigen, dass es ein $m \in \mathbb{R}$ gibt, so dass der Flächeninhalt A_m des beschrieben Quadrates extremal wird. Anders formuliert: Du sollst also zeigen, dass es ein m gibt, so dass der Flächeninhalt A_m des Quadrates entweder maximal oder minimal wird.

Der Flächeninhalt A eines Quadrates berechnet sich über das Produkt seiner Seitenlängen a, wobei folgendes gilt:

$A = a \cdot a = a^2$.

Um den Flächeninhalt eines Quadrates zu berechnen, benötigst du also nur die Länge einer Kante des Quadrates. Für den Flächeninhalt A_m des von uns betrachteten Quadrates gilt nach dieser Formel also:

$A_m = \overline{A_1B_1} \cdot \overline{A_1B_1} = \overline{A_1B_1}^2 = \left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|^2$.

Willst du ausgehend davon zeigen, dass es nur ein $m \in \mathbb{R}$ gibt, für welches A_m extremal wird, so gehe hier so vor:

- Berechne den Flächeninhalt A_m in Abhängigkeit von m und fasse den resultierenden Term als den Funktionsterm einer Flächenfunktion A mit Funktionsterm $A(m)$ auf. Verwende dazu dein CAS und speichere den Term $A(m)$ im Calculator-Modus.
- Bestimme zunächst die potentiellen Extremstellen von A über die notwendige Bedingung für Extremstellen, welche besagt, dass bei einer Extremstelle m_E folgendes gelten muss:

  $A'(m_E) = 0$
- Zeige durch die hinreichende Bedingung, dass bei den von dir bestimmten Extremstellen auch wirklich Extrema vorliegen. Die hinreichende Bedingung besagt, dass bei einer Extremstelle x_E gelten muss:

  $A''(m_E) \neq 0$

e) ▶ **Angeben der Koordinaten aller Eckpunkte des Quaders** (4P)

Der Aufgabenstellung kannst du entnehmen, dass die Punkte A_m und B_m für $-1 \leq m \leq \frac{1}{3}$ Kanten eines Quaders sind. Deine Aufgabe ist es nun, die Koordinaten aller Eckpunkte dieses Quaders anzugeben.

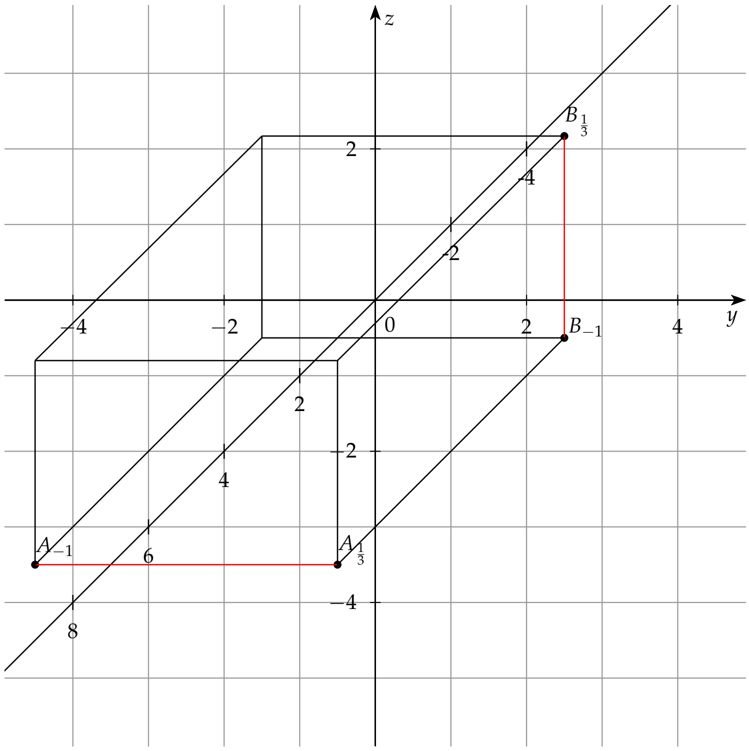
Ein Quader besitzt als Grundfläche ein Rechteck, das heißt, ein Viereck mit zwei unterschiedlichen Kantenlängen. Zwei der Kanten des Quaders können durch A_m und B_m und $-1 \leq m \leq \frac{1}{3}$ bestimmt werden. Das heißt die ersten vier Eckpunkte des Quaders ermittelst du, indem du die Koordinaten von A_m für $m = -1$ und $m = \frac{1}{3}$ und von B_m für $m = -1$ und $m = \frac{1}{3}$ berechnest, da diese Punkte gerade den Enden der jeweiligen Kanten entsprechen:

$A_{-1}(5 \mid -2 \mid -1)$, $A_{\frac{1}{3}}(5 \mid 2 \mid -1)$, $B_{-1}(-1 \mid 2 \mid -1)$ und $B_{\frac{1}{3}}\left(-1 \mid 2 \mid \frac{5}{3}\right)$.

Um dir einen besseren Überblick über die Positionen der Eckpunkte A_{-1}, $A_{\frac{1}{3}}$, B_{-1} und $B_{\frac{1}{3}}$ im betrachteten Quader zu schaffen, kann es sinnvoll sein, diese und die zugehörigen Kanten $\overline{A_{-1}A_{\frac{1}{3}}}$ und $\overline{B_{-1}B_{\frac{1}{3}}}$ in ein dreidimensionales Koordinatensystem zu skizzieren:

Vervielfältigung nur innerhalb einer Lehrer-/Klassen- oder Schullizenz und mit Hinweis auf MatheLV erlaubt.

Betrachtest du die Koordinaten von A_{-1}, $A_{\frac{1}{3}}$, B_{-1} und $B_{\frac{1}{3}}$ und die nebenstehende Skizze näher, so kannst du erkennen, dass die z-Koordinaten von A_{-1}, $A_{\frac{1}{3}}$ und B_{-1} übereinstimmen. Das heißt, bei der Kante $\overline{A_{-1}A_{\frac{1}{3}}}$ muss es sich um die vordere untere Kante des Quaders handeln. Betrachtest du hingegen die y-Koordinate von $A_{\frac{1}{3}}$, B_{-1} und $B_{\frac{1}{3}}$ näher, so kannst du erkennen, dass diese ebenfalls übereinstimmen. Für die Kante $\overline{B_{-1}B_{\frac{1}{3}}}$ bedeutet das, dass es sich bei dieser um die hintere rechte Kante des Quaders handeln muss.



Mit diesen Informationen lassen sich die restlichen Eckpunkte des Quaders über geschickte Addition der Ortsvektoren von A_{-1}, $A_{\frac{1}{3}}$, B_{-1} und $B_{\frac{1}{3}}$ mit den zu den Kanten $\overline{A_{-1}A_{\frac{1}{3}}}$ und $\overline{B_{-1}B_{\frac{1}{3}}}$ zugehörigen Vektoren berechnen.

Vervielfältigung nur innerhalb einer Lehrer-/Klassen- oder Schullizenz und mit Hinweis auf MatheLV erlaubt.