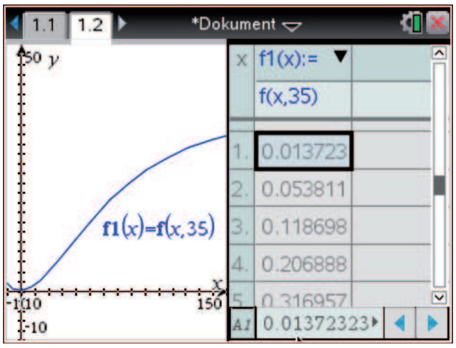
a) (1) ▶ **Graphen von f_{35} zeichnen** (14P)

Nutze dein CAS, um eine erste Vorstellung vom Graphen von f_{35} zu bekommen. Zeichne dazu den Graphen im `Graphs`-Modus und lasse dir eine Wertetabelle anzeigen. Überlege außerdem, welche Informationen du bereits über die Funktion f_{35} bestimmt hast.

Die Wertetabelle kannst du im `Graphs`-Modus mit `menu → 7 → 1` oder mit `ctrl + T` einblenden.



(2) ▶ **Parameterwert a berechnen**

Nach 10 Jahren ist die Buche 1,15 m hoch. Laut Aufgabenstellung wird für die Funktion f_a die Zeit auf der t-Achse in Jahren abgetragen. Für die Funktion f_a, die das Wachstum dieser Buche beschreibt, muss also gelten:

$f_a(10) = 1,15.$

Löse diese Gleichung nach a auf. Nutze dazu den `solve`-Befehl.

(3) ▶ **$f(20)$ berechnen und interpretieren**

Setze $t = 20$ in die Funktionsgleichung von f ein. Beachte bei der Interpretation, dass die Funktionswerte von f die Höhe der Buche zum Zeitpunkt t angibt. Alternativ kannst du den Funktionswert auch mit dem GTR berechnen.

(4) ▶ **Maximale Höhe der Buche begründen**

In der Modellierung wird die Höhe der Buche durch die Funktion f beschrieben. Die Buche kann nicht höher als 35 m hoch werden, wenn die Funktionswerte von f niemals größer als 35 m werden.

Du weißt aus dem Graphen, dass sich der Graph von f für $t \to \infty$ einer waagerechten Asymptote annähert und damit vermutlich einen **Grenzwert** besitzt. Untersuche also das Verhalten der Funktionswerte von f für $t \to \infty$.

b) ► **Zeitpunkt des stärksten Wachstums berechnen** (9P)

Die Funktion f beschreibt die Höhe der Buche. Die erste Ableitung f' beschreibt die **Änderungsrate** des Höhenwachstums, also die Wachstumsgeschwindigkeit. Gesucht ist der Zeitpunkt, zu dem die Buche am stärksten wächst, also die maximale Wachstumsgeschwindigkeit.

Berechne deshalb das Maximum von f'. Dies ist zugleich die Wendestelle von f.

Ein Maximum t_M von f' liegt dann vor, wenn die notwendige und die hinreichende Bedingung erfüllt sind:

- $f''(t_M) = 0$
- $f'''(t_M) < 0$; alternativ Vorzeichenwechsel-Kriterium

Bilde zunächst die ersten drei Ableitungen von f nach der Kettenregel, löse dann die Gleichung $f''(t) = 0$ und setze die potentielle Wendestelle in f''' ein. Du kannst das CAS nutzen, um den Funktionsterm von f zu vereinfachen, z.B. mit dem `expand`-Befehl.

c) (1) ► **Zeitlichen Verlauf im Vergleich beschreiben** (19P)

Betrachte die Unterschiede und die Gemeinsamkeiten der beiden Graphen: Du kannst zum Beispiel die Lage des Hochpunktes und die Steigung der Graphen im Sachzusammenhang vergleichend interpretieren.

Es fällt auf, dass der Graph der Funktion f' durchweg **schneller** ansteigt und auch im Hochpunkt einen größeren Funktionswert annimmt. Die Hochpunkte liegen an der gleichen Stelle $t \approx 35$ vor.

Du kannst also sagen: Die Buche, deren Wachstumsgeschwindigkeit durch f' beschrieben wird, besitzt durchweg eine höhere Wachstumsgeschwindigkeit. Nach etwa 35 Jahren ist die Wachstumsgeschwindigkeit bei beiden Buchen maximal; auch hier wächst die Buche von f schneller.

Je älter die Buchen werden, desto kleiner wird die Wachstumsgeschwindigkeit. Die Buchen wachsen mit zunehmendem Alter also **langsamer**, wobei auch hier die Geschwindigkeit der Buche von f durchweg größer ist.

(2) ► **Gleiche Stelle des Maximums nachweisen**

Du musst nicht das Maximum von g' berechnen, sondern kannst die Aufgabe lösen, indem du die beiden Funktionsterme von f' und g' miteinander vergleichst.

(3) ► **Größere Höhe der ersten Buche nachweisen**

Die Funktionen f' bzw. g' beschreiben die Wachstumsgeschwindigkeiten der beiden Buchen. Die Wachstumsgeschwindigkeit ist die Änderungsrate der **Höhe** der Buchen. Also wird die Höhe der Buchen durch die **Fläche** beschrieben, die vom Graphen von f' bzw. g' und der t-Achse eingeschlossen wird.

Die beiden Buchen sind zum Zeitpunkt des Keimens $t = 0$ gleich hoch. Zu einem beliebigen Zeitpunkt $t > 0$ hat also diejenige Buche eine größere Höhe, für die die Fläche unter dem entsprechenden Graphen **größer** ist.

Du siehst, dass die Fläche unter dem Graphen von f' immer größer ist als die unter dem Graphen von g'. Damit ist die erste Buche zu jedem Zeitpunkt $t > 0$ größer als die zweite Buche.

(4) ► **Durchschnittliche Wachstumsgeschwindigkeit bestimmen**

Die Wachstumsgeschwindigkeit der zweiten Buche wird durch die Funktion g' beschrieben. Gesucht ist der **Mittelwert** der Funktionswerte von g' im Intervall $[0\,;\,50]$.

Für den Mittelwert M der Funktionswerte einer Funktion f im Intervall $[a\,;\,b]$ gilt allgemein:

$$M = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

d) (1) ► **Stammfunktion h von g' bestimmen** (8P)

g' hat die Gleichung $g'(t) = 1{,}1 \cdot \left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{50}t} - \mathrm{e}^{-\frac{1}{25}t}\right)$. Eine Stammfunktion g kannst du durch **lineare Substitution** bilden oder mit deinem CAS bestimmen.

► **Wahrheit der Behauptung untersuchen**

Wie oben erklärt, kannst du die Höhe der ersten bzw. der zweiten Buche bestimmen, indem du den Inhalt der Fläche berechnest, die vom Graphen von f' bzw. g' und der t-Achse eingeschlossen wird. Du willst wissen, um wie viel sich die Höhen der beiden Buchen unterscheiden, wenn sie 50 Jahre alt sind. Dich interessiert also die Höhe der beiden Buchen zum Zeitpunkt $t = 50$.

Berechne also jeweils das Integral über f' bzw. über g' zwischen $t = 0$ und $t = 50$. Dies kannst du entweder rechnerisch über den Hauptsatz der Integralrechnung tun oder mit deinem CAS.

Eine Stammfunktion von g' hast du gerade berechnet; eine Stammfunktion von f' kennst du ebenfalls: f' ist die erste Ableitung von f.