a) ► **Definitionsbereich von f_a angeben** (7P)

Der Definitionsbereich von f_a umfasst alle Werte, welche für x eingesetzt werden dürfen. Betrachte den Funktionsterm von f_a. Er stellt sich als Produkt eines linearen Terms $\frac{3}{4}x$ und eines logarithmischen Terms $\ln\left(\frac{x}{a^2}\right)$ dar. Der ln ist dabei nur für **positive Argumente** definiert. Der Ausdruck in der Klammer $\frac{x}{a^2}$ muss also **positiv** sein.

Dies ist der Fall, wenn $x > 0$ ist. Damit erhältst du den Definitionsbereich von f_a mit $D = \mathbb{R}^+ =]0\,;\infty[= \{x \mid x \in \mathbb{R}, x > 0\}$.

► **Nullstelle von f_a bestimmen**

Setze $f_a(x) = 0$, um die Nullstelle von f_a zu bestimmen.

$$\begin{aligned} f_a(x) &= 0 \\ \frac{3}{4}x \cdot \ln\left(\frac{x}{a^2}\right) &= 0 \qquad \mid \cdot\frac{4}{3} \\ x \cdot \ln\left(\frac{x}{a^2}\right) &= 0 \end{aligned}$$

Nun kann dir der Satz vom Nullprodukt weiterhelfen: Ein Produkt ist Null, wenn einer seiner Faktoren Null ist. Eine erste Lösung wäre also $x_1 = 0$. Allerdings ist dieser Wert nicht im Definitionsbereich von f_a enthalten und scheidet somit aus.

Überlege also, wann die ln-Funktion Null wird: $\ln(1) = 0$. Das Argument $\frac{x}{a^2}$ muss also den Wert 1 annehmen:

$$\begin{aligned} \frac{x}{a^2} &= 1 \qquad \mid \cdot a^2 \\ x &= a^2 \end{aligned}$$

f_a besitzt die Nullstelle $x = a^2$.

► **Verhalten der Funktionswerte für $x \to 0$ bestimmen**

In diesem Aufgabenteil wird die Funktion f_a für $a = 3$ betrachtet. Bestimme zunächst den zugehörigen Funktionsterm $f_3(x)$:

$$f_3(x) = \frac{3}{4}x \cdot \ln\left(\frac{x}{9}\right)$$

Gefragt ist nach dem Verhalten der Funktionswerte $f_3(x)$ für $x \to 0$. In Formeln:

$$\lim_{x\to 0} f_3(x) = \lim_{x\to 0} \frac{3}{4}x \cdot \ln\left(\frac{x}{9}\right)$$

Überlege dir: gegen welchen Wert streben die beiden Faktoren des Funktionsterms und welcher der beiden Werte setzt sich langfristig durch?

Der erste Faktor des Funktionsterms $\frac{3}{4}x$ geht für $x \to 0$ gegen Null. Der zweite Faktor, $\ln(\frac{x}{9})$ strebt für $x \to 0$ gegen $-\infty$. Damit ergibt sich:

$$\lim_{x\to 0} f_3(x) = \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{3}{4}x}_{\to 0} \cdot \underbrace{\ln\left(\frac{x}{9}\right)}_{\to -\infty}$$

Auf lange Sicht gesehen setzt sich dabei die Null im Funktionsterm durch:

$$\lim_{x\to 0} f_3(x) = \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{3}{4}x}_{\to 0} \cdot \underbrace{\ln\left(\frac{x}{9}\right)}_{\to -\infty} = 0$$

Vervielfältigung nur innerhalb einer Lehrer-/Klassen- oder Schullizenz und mit Hinweis auf MatheLV erlaubt.

b) **► Lokalen Tiefpunkt T_a nachweisen** (13P)

$T_a\left(\frac{a^2}{\mathrm{e}} \mid -\frac{3a^2}{4\mathrm{e}}\right)$ ist ein lokaler Tiefpunkt von G_a, wenn

1. T_a auf G_a liegt, d.h. wenn gilt: $f_a\left(\frac{a^2}{\mathrm{e}}\right) = -\frac{3a^2}{4\mathrm{e}}$,
2. das notwendige Kriterium für ein Minimum erfüllt ist, d.h. wenn gilt: $f'_a\left(\frac{a^2}{\mathrm{e}}\right) = 0$,
3. das hinreichende Kriterium für ein Minimum erfüllt ist, d.h. wenn gilt: $f''_a\left(\frac{a^2}{\mathrm{e}}\right) > 0$.

Prüfe diese drei Bedingungen nach. Du kannst dabei so vorgehen:

- Bilde im ersten Schritt die erste Ableitung f'_a nach der Produkt- und der Kettenregel. Die zweite Ableitung ist dir in der Aufgabenstellung gegeben.
- Untersuche anschließend durch Einsetzen und Ausrechnen, ob die drei Kriterien erfüllt sind.

1. Schritt: Ableitung bestimmen

Bestimme die erste Ableitung f'_a nach der Produkt- und der Kettenregel.

$$\begin{aligned}
f'_a(x) &= \frac{3}{4}\cdot\ln\left(\frac{x}{a^2}\right) + \frac{3}{4}x\cdot\frac{1}{\frac{x}{a^2}}\cdot\frac{1}{a^2}\\
&= \frac{3}{4}\cdot\ln\left(\frac{x}{a^2}\right) + \frac{3}{4}x\cdot\frac{a^2}{x}\cdot\frac{1}{a^2}\\
&= \frac{3}{4}\cdot\ln\left(\frac{x}{a^2}\right) + \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

2. Schritt: Lage von T_a auf G_a zeigen

Zeige, dass T_a ein Punkt auf G_a ist. Dies ist der Fall, wenn gilt: $f_a\left(\frac{a^2}{\mathrm{e}}\right) = -\frac{3a^2}{4\mathrm{e}}$.

$$\begin{aligned}
f_a\left(\frac{a^2}{\mathrm{e}}\right) &= \frac{3}{4}\cdot\frac{a^2}{\mathrm{e}}\cdot\ln\left(\frac{\frac{a^2}{\mathrm{e}}}{a^2}\right)\\
&= \frac{3}{4}\cdot\frac{a^2}{\mathrm{e}}\cdot\ln\left(\frac{a^2}{\mathrm{e}}\cdot\frac{1}{a^2}\right)\\
&= \frac{3}{4}\cdot\frac{a^2}{\mathrm{e}}\cdot\ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)\\
&= \frac{3}{4}\cdot\frac{a^2}{\mathrm{e}}\cdot\ln\left(\mathrm{e}^{-1}\right)\\
&= \frac{3}{4}\cdot\frac{a^2}{\mathrm{e}}\cdot(-1)\\
&= -\frac{3}{4}\cdot\frac{a^2}{\mathrm{e}} = -\frac{3a^2}{4\mathrm{e}}
\end{aligned}$$

Damit ist die Lage von T_a auf dem Graphen G_a nachgewiesen.

3. Schritt: Notwendiges Kriterium für eine Extremstelle nachweisen

Zeige nun, dass es sich bei $x = \frac{a^2}{\mathrm{e}}$ um eine Extremstelle der Funktion f_a handelt. Weise hierzu das notwendige Kriterium $f'_a(x_E) = 0$ nach:

Vervielfältigung nur innerhalb einer Lehrer-/Klassen- oder Schullizenz und mit Hinweis auf MatheLV erlaubt.

$$\begin{aligned}
f_a'\left(\frac{a^2}{\mathrm{e}}\right) &= \frac{3}{4}\cdot\ln\left(\frac{\frac{a^2}{\mathrm{e}}}{a^2}\right)+\frac{3}{4}\\
&= \frac{3}{4}\cdot\ln\left(\frac{a^2}{\mathrm{e}}\cdot\frac{1}{a^2}\right)+\frac{3}{4} \qquad \text{(analog zu oben: } \tfrac{a^2}{\mathrm{e}}\cdot\tfrac{1}{a^2}=\mathrm{e}^{-1}\text{)}\\
&= \frac{3}{4}\cdot(-1)+\frac{3}{4}\\
&= -\frac{3}{4}+\frac{3}{4}=0
\end{aligned}$$

Damit ist das notwendige Kriterium für ein Minimum nachgewiesen.

4. Schritt: Hinreichendes Kriterium für ein Minimum nachweisen

Weise zuletzt nach, dass es sich bei T_a um einen lokalen Tiefpunkt handelt und setze hierzu $x=\frac{a^2}{\mathrm{e}}$ in $f_a''(x)$ ein. Wenn sich hier ein positiver Wert ergibt, so ist das hinreichende Kriterium für ein Minimum und damit auch T_a als lokaler Tiefpunkt des Graphen G_a nachgewiesen. Den Funktionsterm von f_a'' erhältst du aus der Aufgabenstellung und darfst ihn ohne Nachweis verwenden.

$$\begin{aligned}
f_a''\left(\tfrac{a^2}{\mathrm{e}}\right) &= \frac{3}{4\cdot\frac{a^2}{\mathrm{e}}}\\
&= \frac{3}{\frac{4a^2}{\mathrm{e}}}\\
&= 3\cdot\frac{\mathrm{e}}{4a^2}
\end{aligned}$$

Alle Bestandteile dieses Terms sind positiv: die 3, die Eulersche Zahl e und wegen des Quadrates auch der Nenner $4a^2$. Also ist das gesamte Produkt positiv und es gilt: $f_a''\left(\frac{a^2}{\mathrm{e}}\right)>0$. Damit ist das hinreichende Kriterium für ein Minimum erfüllt.

T_a ist ein lokaler Tiefpunkt des Graphen G_a.

▶ Nachweis, dass kein Wendepunkt existiert

Für eine Wendestelle x_W von f_a müsste gelten:

- $f_a''(x_W)=0$
- $f_a'''(x_W)\neq 0$

Wenn keiner der Graphen G_a einen Wendepunkt besitzen soll, so darf die zweite Ableitung f_a'' keine Nullstellen besitzen. Prüfe dies nach:

$$\begin{aligned}
f_a''(x) &= 0\\
\frac{3}{4x} &= 0
\end{aligned}$$

Ein Bruch ist Null, wenn sein Zähler Null wird. Dieser ist mit 3 aber konstant. Also kann der Bruch und somit auch die zweite Ableitung f_a'' niemals den Wert Null annehmen.
Deshalb besitzt keiner der Graphen G_a einen Wendepunkt.

▶ Parameter *a* der Scharkurven bestimmen

Du hast im Aufgabenteil a) die Nullstelle von f_a berechnet, nämlich $x=a^2$. Die Nullstelle von f_a ist die Stelle, an der der Graph G_a die x-Achse schneidet. Bei allen drei Scharkurven ist diese Stelle gut aus der Anlage abzulesen.

Vervielfältigung nur innerhalb einer Lehrer-/Klassen- oder Schullizenz und mit Hinweis auf MatheLV erlaubt.

Lies die Nullstellen ab und bestimme hieraus den zugehörigen Parameterwert von a. Beachte dabei, dass gilt: $a > 0$.

1. Schritt: Nullstellen ablesen

Graph I schneidet die x-Achse bei $x_1 = 4$, Graph II bei $x_2 = 9$ und Graph III bei $x_3 = 16$.

2. Schritt: Parameterwert berechnen

Für die Nullstellen gilt: $x = a^2$. Die Nullstellen sind also jeweils das **Quadrat** des Parameterwerts a. Umgekehrt ist dann der Parameterwert von a die **Wurzel** aus der entsprechenden Nullstelle. Beachte dabei, dass laut Aufgabenstellung $a > 0$ gilt. Beim Wurzelziehen kann also die negative Lösung vernachlässigt werden.

Es folgt:

- Graph I gehört zu $a = \sqrt{4} = 2$.
- Graph II gehört zu $a = \sqrt{9} = 3$.
- Graph III gehört $a = \sqrt{16} = 4$.

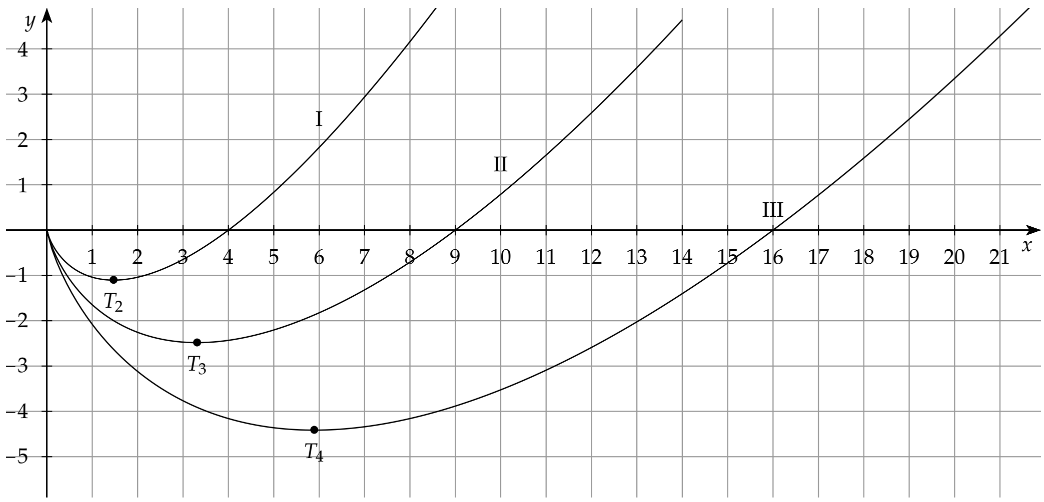
Es handelt sich um die Scharkurven G_2 (Graph I), G_3 (Graph II) und G_4 (Graph III).

▶ Koordinaten der Extrempunkte angeben und einzeichnen

Die Graphen G_a besitzen als Extrempunkt jeweils den Tiefpunkt $T_a\left(\frac{a^2}{\mathrm{e}} \mid -\frac{3a^2}{4\mathrm{e}}\right)$. Setze die Parameterwerte für a in diese Koordinaten ein und erhalte so die Koordinaten der Tiefpunkte der drei abgebildeten Graphen.

$$\begin{array}{lll}
G_2 \text{ (Graph I):} & a = 2\text{:}\ T_2\left(\frac{4}{\mathrm{e}} \mid -\frac{12}{4\mathrm{e}}\right) = & T_2\left(\frac{4}{\mathrm{e}} \mid -\frac{3}{\mathrm{e}}\right) \approx \quad T_2\,(1{,}47 \mid -1{,}1) \\
G_3 \text{ (Graph II):} & a = 3\text{:} & T_3\left(\frac{9}{\mathrm{e}} \mid -\frac{27}{4\mathrm{e}}\right) \approx \quad T_3\,(3{,}31 \mid -2{,}48) \\
G_4 \text{ (Graph III):} & a = 4\text{:}\ T_4\left(\frac{16}{\mathrm{e}} \mid -\frac{48}{4\mathrm{e}}\right) = & T_4\left(\frac{16}{\mathrm{e}} \mid -\frac{12}{\mathrm{e}}\right) \approx \quad T_4\,(5{,}89 \mid -4{,}41)
\end{array}$$

Zeichne diese drei Punkte in das Koordinaten der Anlage ein:



c) **▶ Stammfunktion von f_a ermitteln** (9P)

Der Funktionsterm von f_a ist ein Produkt aus einem linearen und einem logarithmischen Term. Du kannst eine Stammfunktion von f_a durch **partielle Integration** bestimmen. Die Formel hierzu lautet allgemein:

Vervielfältigung nur innerhalb einer Lehrer-/Klassen- oder Schullizenz und mit Hinweis auf MatheLV erlaubt.

$$\int u'(x)\cdot v(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)\cdot v(x)] - \int u(x)\cdot v'(x)\,\mathrm{d}x$$

Es bietet sich an, als $u'(x)$ denjenigen Faktor zu wählen, der **leicht zu integrieren** ist.

Wir wählen daher: $u'(x) = \dfrac{3}{4}x \qquad v'(x) = \dfrac{1}{\frac{x}{a^2}}\cdot\dfrac{1}{a^2} = \dfrac{a^2}{x}\cdot\dfrac{1}{a^2} = \dfrac{1}{x}$

$u(x) = \dfrac{3}{8}x^2 \qquad v(x) = \ln\left(\dfrac{x}{a^2}\right)$

Einsetzen in die Formel von oben ergibt:

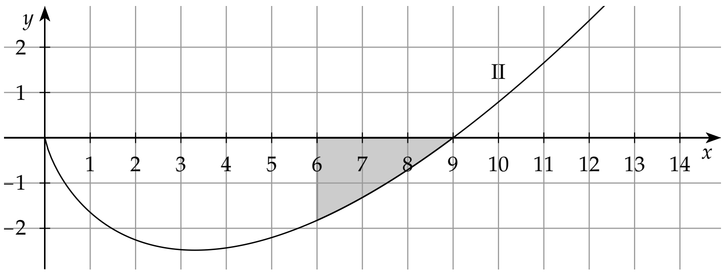
$$\begin{aligned}\int f_a(x)\,\mathrm{d}x &= \int \left(\frac{3}{4}x\cdot\ln\left(\frac{x}{a^2}\right)\right)\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{3}{8}x^2\cdot\ln\left(\frac{x}{a^2}\right) - \int\left(\frac{3}{8}x^2\cdot\frac{1}{x}\right)\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{3}{8}x^2\cdot\ln\left(\frac{x}{a^2}\right) - \int\left(\frac{3}{8}x\right)\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{3}{8}x^2\cdot\ln\left(\frac{x}{a^2}\right) - \frac{3}{16}x^2\end{aligned}$$

Über partielle Integration ergibt sich als Stammfunktion von f_a die Funktion F_a mit $F_a(x) = \dfrac{3}{8}x^2\cdot\ln\left(\dfrac{x}{a^2}\right) - \dfrac{3}{16}x^2 + C$.

Wir wählen im Folgenden $C = 0$.

▶ **Inhalt der eingeschlossenen Fläche berechnen**

Wir wollen den Inhalt der eingeschlossenen Fläche mit A bezeichnen. Die Fläche wird vom Graphen von f_3 und der x-Achse für $6 \leq x \leq 9$ eingeschlossen. Der Graph zu f_3 ist der Graph G_3. In der Anlage ist er als Graph II eingezeichnet. Du kannst die betrachtete Fläche darin markieren:



Du erkennst, dass die Fläche vollständig unterhalb der x-Achse liegt. Ihren Flächeninhalt A kannst du nun über den **Hauptsatz der Integralrechnung** ermitteln. Als Stammfunktion kannst du hierbei das eben berechnete unbestimmte Integral von f_a verwenden. Da die Fläche vollständig unterhalb der x-Achse liegt, liefert das zugehörige Integral einen **negativen Flächeninhalt**. Du kannst Betragsstriche verwenden, um einen positiven Wert zu erhalten.

Da die Funktion f_3 betrachtet wird, kannst du $a = 3$ einsetzen und erhältst so:

$$F_3(x) = \frac{3}{8}x^2\cdot\ln\left(\frac{x}{9}\right) - \frac{3}{16}x^2$$

Für den Inhalt A der eingeschlossenen Fläche gilt:

$$\begin{aligned}A &= \left|\int_6^9 f_3(x)\,\mathrm{d}x\right|\\ &= \left|[F_3(x)]_6^9\right|\end{aligned}$$

Vervielfältigung nur innerhalb einer Lehrer-/Klassen- oder Schullizenz und mit Hinweis auf MatheLV erlaubt.

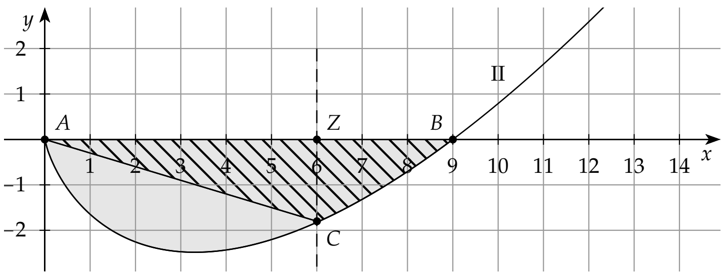
$$
\begin{aligned}
&= |F_3(9) - F_3(6)| \\
&= \left| \left(\frac{3}{8} \cdot 9^2 \cdot \ln\left(\frac{9}{9}\right) - \frac{3}{16} \cdot 9^2 \right) - \left(\frac{3}{8} \cdot 6^2 \cdot \ln\left(\frac{6}{9}\right) - \frac{3}{16} \cdot 6^2 \right) \right| \\
&= \left| \left(\frac{243}{8} \cdot \ln(1) - \frac{243}{16} \right) - \left(\frac{108}{8} \cdot \ln\left(\frac{2}{3}\right) - \frac{108}{16} \right) \right| \\
&= \left| \left(\frac{243}{8} \cdot 0 - \frac{243}{16} \right) - \left(\frac{27}{2} \cdot \ln\left(\frac{2}{3}\right) - \frac{108}{16} \right) \right| \\
&= \left| -\frac{243}{16} - \frac{27}{2} \cdot \ln\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{108}{16} \right| \\
&= \left| -\frac{135}{16} - \frac{27}{2} \cdot \ln\left(\frac{2}{3}\right) \right| \approx 2{,}96
\end{aligned}
$$

Der Inhalt der eingeschlossenen Fläche beläuft sich auf 2,96 FE; gerundet also auf etwa 3,0 FE.

d) ▶ **Fläche des Naturschutzgebietes berechnen** (6P)

Betrachte die beschriebene Situation zunächst in einer Abbildung. Beim **Fahrweg** handelt es sich um den Graphen G_3, der in der Anlage als G II dargestellt ist. Die Orte Altfeld und Burghausen sind durch die Punkte $A\,(0 \mid 0)$ und $B\,(9 \mid 0)$ dargestellt; die gerade **Landstraße** zwischen den beiden Orten liegt also auf der x-Achse. Das **Naherholungsgebiet** entspricht dann der Fläche, welche von der x-Achse und dem Graphen G_3 zwischen $x = 0$ und $x = 9$ eingeschlossen wird.

Das Ausflugslokal liegt in Punkt $C\,(6 \mid -1{,}8)$. Laut Aufgabenstellung liegt es „direkt am Fahrweg“, d.h. höchstwahrscheinlich liegt der Punkt C auf dem Graphen G_3. Die Strecke $\overline{AC}$ teilt nun das Nacherholungsgebiet in zwei Teilflächen, wobei der Inhalt der **größeren** Fläche berechnet werden soll. Wir haben sie in der folgenden Abbildung schraffiert:



Betrachte die schraffierte Fläche. Sie lässt sich in zwei Teilflächen gliedern:

- ein **rechtwinkliges Dreieck** ACZ mit den Katheten $\overline{AZ}$ und $\overline{ZC}$,
- das Flächenstück, dessen Inhalt $\int\limits_6^9 f_3(x)\,\mathrm{d}x \approx 3$ du bereits in Aufgabenteil c) berechnet hast.

Berechne den Inhalt des Dreiecks und ermittle so den Flächeninhalt des gesamten Naturschutzgebietes.

Da es sich um ein rechtwinkliges Dreieck handelt, kannst du je eine der beiden Katheten als Grundseite und Höhe wählen. Wir wählen $\overline{AZ}$ als Grundseite und $\overline{ZC}$ als Höhe.

Die Länge der beiden Katheten erhältst du direkt aus der Abbildung: $\overline{AZ} = 6\,\text{km}$ und $\overline{ZC} = 1{,}8\,\text{km}$. Für den Flächeninhalt A_Δ des Dreiecks gilt dann:

Vervielfältigung nur innerhalb einer Lehrer-/Klassen- oder Schullizenz und mit Hinweis auf MatheLV erlaubt.

$$\begin{aligned} A_\Delta &= \frac{1}{2}\cdot g\cdot h \\ &= \frac{1}{2}\cdot \overline{AZ}\cdot\overline{ZC} \\ &= \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 1{,}8 \\ &= 5{,}4 \end{aligned}$$

Für die Fläche A_N des Naturschutzgebietes ergibt sich dann:

$A_N = 5{,}4\,\text{km}^2 + 3\,\text{km}^2 = 8{,}4\,\text{km}^2$

Das Naturschutzgebiet erstreckt sich über eine Fläche von 8,4 km^2.

▶ Prozentualen Anteil der Fläche berechnen

Zuletzt ist nach dem prozentualen Anteil gefragt, den das Naturschutzgebiet am gesamten Naherholungsgebiet besitzt. Aus der Aufgabenstellung weißt du, dass das Naherholungsgebiet insgesamt 15,2 km^2 groß ist. Das Naturschutzgebiet ist 8,4 km^2 groß. Für den prozentualen Anteil p folgt also:

$p\,\% = \frac{8{,}4}{15{,}2}\cdot 100\,\% \approx 55{,}26\,\%.$

Das Naturschutzgebiet nimmt etwa 55,26 % der Fläche des Naherholungsgebietes ein.

e) **▶ Koordinaten von P_a bestimmen** (5P)

Die Gerade, welche den Radweg durch die Punkte $A(0 \mid 0)$ und $C(6 \mid -1{,}8)$ enthält, wollen wir mit g bezeichnen. Die Gerade g schneidet laut Aufgabenstellung jeden Graphen G_a in einem Punkt P_a. Gesucht sind die Koordinaten von P_a.

Den Schnittpunkt zweier Graphen kannst du durch Gleichsetzen der zugehörigen Funktionsterme berechnen. Du kannst also so vorgehen:

- Bestimme zunächst eine Gleichung der Geraden g.
- Setze dann $f_a(x) = g(x)$ und löse nach x auf. So erhältst du die x-Koordinate von P_a.
- Berechne zuletzt die zugehörige y-Koordinate von P_a.

1. Schritt: Geradengleichung von g bestimmen

g ist eine Gerade. Die allgemeine Funktionsgleichung lautet daher: $g(x) = mx + b$, wobei m die **Steigung** und b der **y-Achsenabschnitt** der Geraden ist.

Du weißt, dass g durch den Punkt $A\,(0 \mid 0)$ verläuft, also durch den Ursprung. g ist deshalb eine Ursprungsgerade. Daraus folgt, dass gilt: $b = 0$.

Die Steigung m kannst du über das **Steigungsdreieck** berechnen:

$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{-1{,}8-0}{6-8} = \frac{-1{,}8}{6} = -0{,}3$

Es folgt die Geradengleichung $g(x) = -0{,}3x$.

2. Schritt: Schnittstelle von g und f_a berechnen

Setze $f_a(x) = g(x)$ und löse nach x auf.

Vervielfältigung nur innerhalb einer Lehrer-/Klassen- oder Schullizenz und mit Hinweis auf MatheLV erlaubt.

$$\begin{aligned} f_a(x) &= g(x) \\ \frac{3}{4}x \cdot \ln\left(\frac{x}{a^2}\right) &= -0,3x && \mid +0,3x \\ \frac{3}{4}x \cdot \ln\left(\frac{x}{a^2}\right) + 0,3x &= 0 && \mid x \text{ ausklammern} \\ x \cdot \left(\frac{3}{4} \cdot \ln\left(\frac{x}{a^2}\right) + 0,3\right) &= 0 \end{aligned}$$

Ein Produkt ist Null, wenn einer seiner Faktoren Null wird. Als erste Lösung ergibt sich deshalb $x_1 = 0$. Beachte allerdings: Der Definitionsbereich von f_3 ist $\mathbb{R}^+$. $x = 0$ scheidet deshalb als Lösung aus. Betrachte den zweiten Faktor des Produkts separat:

$$\begin{aligned} \frac{3}{4} \cdot \ln\left(\frac{x}{a^2}\right) + 0,3 &= 0 && \mid -0,3 \\ \frac{3}{4} \cdot \ln\left(\frac{x}{a^2}\right) &= -0,3 && \mid \cdot\frac{4}{3} \\ \ln\left(\frac{x}{a^2}\right) &= -\frac{4}{3} \cdot 0,3 \\ \ln\left(\frac{x}{a^2}\right) &= -0,4 && \mid \mathrm{e}^{\cdots} \\ \frac{x}{a^2} &= \mathrm{e}^{-0,4} && \mid \cdot a^2 \\ x &= a^2 \cdot \mathrm{e}^{-0,4} \end{aligned}$$

Als Schnittstelle von g und f_a und somit als x-Koordinate von P_a ergibt sich $x = a^2 \cdot \mathrm{e}^{-0,4}$.

3. Schritt: Zugehörige y-Koordinate berechnen

Setze die eben berechnete x-Koordinate ein in die Funktionsgleichung von g oder von f_a. Dabei bietet es sich an, $g\left(a^2\mathrm{e}^{-0,4}\right)$ zu berechnen, weil es einfach leichter ist:

$g(a^2 \cdot \mathrm{e}^{-0,4}) = -0,3a^2 \cdot \mathrm{e}^{-0,4}$.

Es folgt der Punkt $P_a\left(a^2\mathrm{e}^{-0,4} \mid -0,3a^2\mathrm{e}^{-0,4}\right)$.

Vervielfältigung nur innerhalb einer Lehrer-/Klassen- oder Schullizenz und mit Hinweis auf MatheLV erlaubt.