1. 1.1 ▶ **Bernoulli-Kette begründen** (12BE)

Damit wir ein Ereignis als Bernoulli-Kette auffassen können, müssen einige Kriterien erfüllt sein. Zunächst muss es **zwei mögliche Ausgänge** geben. Dies ist bei uns der Fall: Entweder eine Zwiebel ist die einer gelb-blühenden Tulpe, oder sie ist es nicht.

Weiterhin muss die **Wahrscheinlichkeit** für die beiden Ausgänge **gleich bleiben**. Dies ist dadurch gegeben, dass die 12 Tulpenzwiebeln aus einer **großen Kiste** entnommen werden. Die Grundgesamtheit kann als so groß angesehen werden, dass die Wahrscheinlichkeit für eine gelb blühende Tulpenzwiebel sich **nicht** großartig ändert, wenn eine Zwiebel entnommen wird.
(Im Gegensatz z.B. zu einer Kiste mit 20 Zwiebeln.)

▶ **Wahrscheinlichkeiten berechnen**

In der großen Kiste befinden sich Zwiebeln drei verschiedener Tulpensorten. Die Wahrscheinlichkeit dafür, eine Zwiebel einer **gelb blühenden** Tulpe zu ziehen, liegt also bei $p = \frac{1}{3}$.

Sei X die Zufallsvariable, die die Zwiebeln gelb blühender Tulpen zählt. X ist nach der obigen Begründung binomialverteilt mit $p = \frac{1}{3}$ und $n = 12$, da eine Stichprobe von 12 Zwiebeln betrachtet wird.

1. Schritt: Ereignis A

Zunächst ist nach der Wahrscheinlichkeit $P(X = 0)$ gefragt:

$$P(X = 0) = \binom{12}{0} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^0 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{12} = 0,0077$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von $0,77\%$ befinden sich keine Zwiebeln gelb blühender Tulpen in der Tüte.

2. Schritt: Ereignis B

Gefragt ist die Wahrscheinlichkeit $P(X = 2)$:

$$P(X = 2) = \binom{12}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{10} \approx 0,1272$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa $12,72\%$ befinden sich genau 2 Zwiebeln gelb blühender Tulpen in der Kiste.

3. Schritt: Ereignis C

Hier ist schließlich die Wahrscheinlichkeit $P(X \geq 2)$ zu berechnen:

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - P(X \leq 1) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) \qquad | \; P(X=0) = 0,0077 \\ &= 1 - \left(0,0077 + \binom{12}{1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{11}\right) \\ &= 1 - (0,0077 + 0,0462) = 0,9461 \end{aligned}$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von $94,61\%$ befinden sich mindestens 2 Zwiebeln gelb blühender Tulpen in der Tüte.

1.2 ▶ **Bedeutung im Sachzusammenhang beschreiben**

Schreibe die Gleichung etwas um, damit du ihre Bedeutung besser erkennen kannst. Es handelt sich hier um eine Bernoulli-Kette, d.h. um die Berechnung einer Wahrscheinlichkeit.

$$P(D) = 12 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{11} \cdot \frac{2}{3} \qquad \mid \tbinom{12}{11} = 12$$
$$= \tbinom{12}{11} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{11} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{1}$$

Hier wird die Wahrscheinlichkeit dafür berechnet, dass sich in der Tüte genau 11 Zwiebeln gelb blühender Zwiebeln befinden. Diese ist mit $0{,}00005 = 0{,}005\%$ sehr gering.

Da sich in der „großen Kiste" drei verschiedene Typen von Zwiebeln zu gleichen Teilen von je $\frac{1}{3}$ befinden, kann man auch sagen: Es wird die Wahrscheinlichkeit dafür berechnet, dass sich in einer Tüte 11 Zwiebeln der gleichen Sorte befinden.

2. ▶ **Ungleichungen und Ergebnis interpretieren** (6BE)

Trage zunächst zusammen, was du aus der Aufgabenstellung weißt: Eine beliebige Tulpenzwiebel kommt mit einer Wahrscheinlichkeit von 98% zur Blüte.

Betrachte nun die **erste** Ungleichung: Es sieht aus wie eine Rechnung, in der eine unbekannte Anzahl n berechnet wird. Der ausführliche Term wäre $\binom{n}{n} \cdot (0{,}98)^n \cdot (0{,}02)^0 > 0{,}75$: Es wird berechnet, **wie viele Zwiebeln** gepflanzt werden dürfen, damit sie **alle** mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 75% zur Blüte kommen.

Nun zur **zweiten** Ungleichung: Sie ist gleichsam das **Ergebnis** der Rechnung und sie trägt in sich die Aussage: Es dürfen höchstens 14 Zwiebeln gepflanzt werden, wenn sie alle mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 75% zur Blüte kommen sollen.

3. 3.1 ▶ **Wahrscheinlichkeit berechnen** (12BE)

Sei X die Zufallsvariable, die die Kunden zählt, welche den Fachmarkt verlassen, ohne einen Einkauf getätigt haben. Da davon ausgegangen wird, dass sich das Einkaufsverhalten nicht verändert hat, ist X binomialverteilt mit $p = 0{,}2$ und $n = 100$. Es soll nun die Wahrscheinlichkeit $P(X < 16)$ ermittelt werden:

$$P(X < 16) = P(X \leq 15)$$

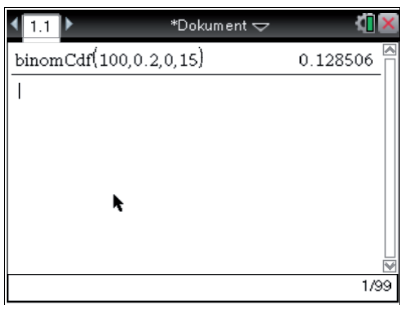
Diese Wahrscheinlichkeit lässt sich auf **zwei** Arten ermitteln.

▶▶ **Lösungsweg A: Lösung mit der Tabelle**

Betrachte eine Tabelle zur kumulierten Binomialverteilung für $p = 0{,}2$ und $n = 100$. Für $k = 15$ ergibt sich der Wert $0{,}1285 = 12{,}85\%$.

Mit einer Wahrscheinlichkeit von $12{,}85\%$ verlassen bei unverändertem Kaufverhalten 16 von 100 Fachmarktbesuchern den Markt, ohne einen Einkauf getätigt zu haben.

Berechne die benötigte Wahrscheinlichkeit im Calculator - Modus. Benutze den Befehl `binomCdf(..)` um die Wahrscheinlichkeit zu berechnen, achte dabei auf die Reihenfolge: `binomCdf`(n; p; untere Schranke; obere Schranke).
Mit einer Wahrscheinlichkeit von $12{,}85\%$ verlassen bei unverändertem Kaufverhalten 16 von 100 Fachmarktbesuchern den Markt, ohne einen Einkauf getätigt zu haben.



3.2 ► **Hypothesentest entwickeln und Entscheidungsregel formulieren**

Die Firmenleitung vermutet, durch ihr erweitertes Angebot den Anteil der Kunden, die keinen Einkauf tätigen **verringert** zu haben. Sie führt daher einen Test mit 100 zufällig ausgewählten Kunden aus.

Dadurch ergeben sich zwei Hypothesen. Zum einen die **Nullhypothese**, welche von der bekannten Wahrscheinlichkeit $p = 0,2$ ausgeht und welche unter gewissen Umständen zugunsten der Hypothese der Firmenleitung H_1 aufgegeben wird:

$H_0 : p_0 \geq 0,2$ und die Hypothese der Firmenleitung $H_1 : p_1 < 0,2$.

Nun soll auf einem Signifikanzniveau von 5% getestet werden, ob der Anteil von 20% tatsächlich **verringert** wurde. Es wird also nach einer Zahl k gefragt, welche die **obere Grenze** des Ablehnungsbereichs $\overline{A} = \{0, 1, ..., k\}$ kennzeichnet. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Ereignis aus dem **Ablehnungsbereich** eintritt, soll dabei weniger als 5% betragen. Aus der letzten Bedingung ergibt sich eine Gleichung:

$P(X \leq k) < 0,05$

Nun ist wieder die Tabelle zur kumulierten Binomialverteilung für $n = 100$ und $p = 0,2$ oder der CAS gefragt. Suche eine Zahl k, für die diese Ungleichung **gerade noch gilt**:

$P(X \leq 12) = 0,0253 < 0,05$

$P(X \leq 13) = 0,0469 < 0,05$

$P(X \leq 14) = 0,0804 > 0,05$

Damit ergibt sich $k = 13$ und somit auch der Ablehnungsbereich $\overline{A} = \{0, 1, ..., 13\}$.

Als Entscheidungsregel gilt also: Wenn von den 100 beobachteten Kunden **höchstens 13** keinen Einkauf tätigen, so wird die Nullhypothese zugunsten der neuen Hypothese $H_1 : p_1 < 0,2$ aufgegeben. Wenn aber **mehr als 13** keinen Einkauf tätigen, so bleibt die **Nullhypothese** erhalten.

► **Mögliche Fehler beschreiben**

Es gibt bei solchen Hypothesentests stets **zwei** Fehler, nämlich den Fehler 1. Art und den Fehler 2. Art. Der Fehler 1. Art beschreibt, die Nullhypothese $H_0 : p_0 \geq 0,2$ aufgegeben wird, **obwohl** sich der Anteil der Kunden ohne Einkauf **nicht** verringert hat.

Der Fehler 2. Art beschreibt das Ereignis, dass die Nullhypothese $H_0 : p_0 \geq 0,2$ **beibehalten wird**, obwohl sich der Anteil der Kunden ohne Einkauf tatsächlich verringert hat.