a) **Definitionsbereich** (7BE)

In die Funktionsgleichung kann jede beliebige reelle Zahl eingesetzt werden, also gilt

$D_f = \mathbb{R}$ bzw. $D_f = \{x \mid x \in \mathbb{R}\}$

Grenzwerte/Verhalten im Unendlichen

Für $x \to +\infty$ geht $(x^2 - 1) \to +\infty$, jedoch, da e^{-x} schneller wächst und $\mathrm{e}^{-x} \to 0$ gilt

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

Für $x \to -\infty$ geht $(x^2 + 1) \to +\infty$ und $\mathrm{e}^{-x} \to +\infty$, also gilt,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen

Für alle Punkte auf der y-Achse gilt $x = 0$, daher gilt für den Schnittpunkt von f mit der y-Achse $S_y(0|f(0))$:

$f(0) = (0^2 - 1) \cdot \mathrm{e}^0 = -1$

Der Schnittpunkt mit der y-Achse ist also der Punkt $S_y(0|-1)$.

Für alle Punkte auf der x-Achse gilt $y = f(x) = 0$, daher gilt für die Schnittpunkte mit der x-Achse $S_x(x_S|0)$:

$0 = (x_S^2 - 1) \cdot \mathrm{e}^{x_S}$

Der Term e^{x_S} kann nicht null werden, daher bleibt nur noch die zweite Möglichkeit $x_S^2 - 1 = 0$, daraus folgt $x_{S1} = 1$ und $x_{S2} = -1$

Die Schnittpunkte mit der x-Achse sind somit die beiden Punkte $S_{x_1}(1|0)$ und $S_{x_2}(-1|0)$.

Extrempunkte

Eine Berechnung ist nicht verlangt, daher werden die Extrempunkte mithilfe des GTR bestimmt, indem die Funktion f gezeichnet wird und dann die Koordinaten der Extrempunkte abgelesen werden. Dies ergibt die beiden Extrempunkte:

$E_{min}(-0,41|-1,25)$ und $E_{max}(2,41|0,43)$

b) **Begründung der Existenz mindestens zweier Wendepunkte** (2BE)

Der Graph muss mindestens zwei Wendepunkte besitzen, da diese mithilfe des Krümmungsverhaltens von f begründet werden können:

- Zwischen den beiden Extrempunkten E_{min} und E_{max} befindet sich ein Wendepunkt, da sich hier das Krümmungsverhalten von f von einer Linkskrümmung (bei E_{min} zu einer Rechtskrümmung (bei E_{max}) ändert

- Nach dem Hochpunkt E_{max} fällt f wieder streng monoton, das Schaubild schneidet jedoch die x-Achse nicht, sondern nähert sich ihr nur asymptotisch an. Daher muss sich hier auch das Krümmungsverhalten wiederum von einer Rechts- zu einer Linkskrümmung ändern und somit ein weiterer Wendepunkt vorliegen

c) **Zuordnung der Schaubilder und Begründung** (3BE)

Der Graph von f ist die Kurve (1) und der Graph von F die Kurve (3), da die Kurve (1) die Änderung/Steigung der Kurve (3) darstellt.
Denn gilt für F gilt:

- Die Extremstellen von F sind die Nullstellen von f ($x_{N_1} = -1$ und $x_{N_2} = 1$)
- Für $x < -1$ und $x > 1$ ist der Graph von F monoton steigend, daher sind hier die Funktionswerte von f positiv; Für $-1 < x < 1$ ist der Graph von F monoton fallend, daher sind hier die Funktionswerte von f negativ

d) **Bestimmung der Gleichung der Tangenten** (6BE)

$f(1) = (1^2 - 1) \cdot \mathrm{e}^{-1} = 0 \cdot \frac{1}{\mathrm{e}} = 0$

Der Punkt P hat folglich die Koordinaten $P(1|0)$

Ableiten von f mithilfe der Produktregel:

$$f(x) = (x^2 - 1) \cdot \mathrm{e}^{-x}$$
$$f'(x) = 2x \cdot \mathrm{e}^{-x} + (x^2 - 1) \cdot (-\mathrm{e}^{-x})$$
$$f'(x) = 2x \cdot \mathrm{e}^{-x} - x^2 \cdot \mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x}$$
$$f'(x) = \mathrm{e}^{-x} \left[-x^2 + 2x + 1\right]$$

Damit wird nun die Steigung der Tangenten t im Punkt P berechnet:

$$m_t = f'(1) = \mathrm{e}^{-1} \left[-(1^2) + 2 \cdot 1 + 1\right] = 2\mathrm{e}^{-1} = \frac{2}{\mathrm{e}}$$

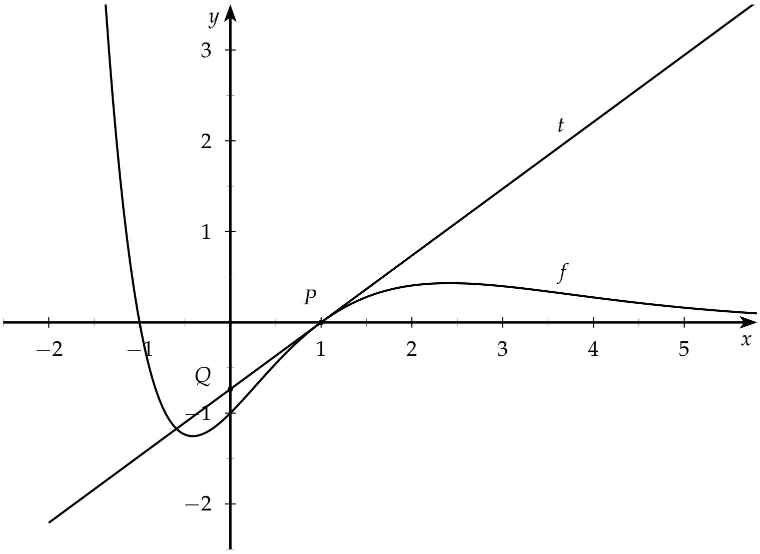
Die Gleichung von t wird durch Einsetzen der Koordinaten von P in die allgemeine Geradengleichung $y = m \cdot x + c$ aufgestellt:

$$y = m_t \cdot x + c_t$$
$$0 = \frac{2}{\mathrm{e}} \cdot 1 + c_t$$
$$c_t = -\frac{2}{\mathrm{e}}$$

Daraus folgt die Tangentengleichung t: $y = \frac{2}{\mathrm{e}}x - \frac{2}{\mathrm{e}}$.

Nachweis des Flächeninhalts

Skizze:



Für das Dreieck APO (O: Ursprung bei $(0|0)$) gilt für den Flächeninhalt:

$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b,$

wobei $a = x_P = 1$ sowie $b = |c_t| = \left|-\frac{2}{e}\right| = \frac{2}{e}$ gilt (eine Strecke kann nie negativ sein). Also gilt:

$A = \frac{1}{2} \cdot x_P \cdot |c_t|$

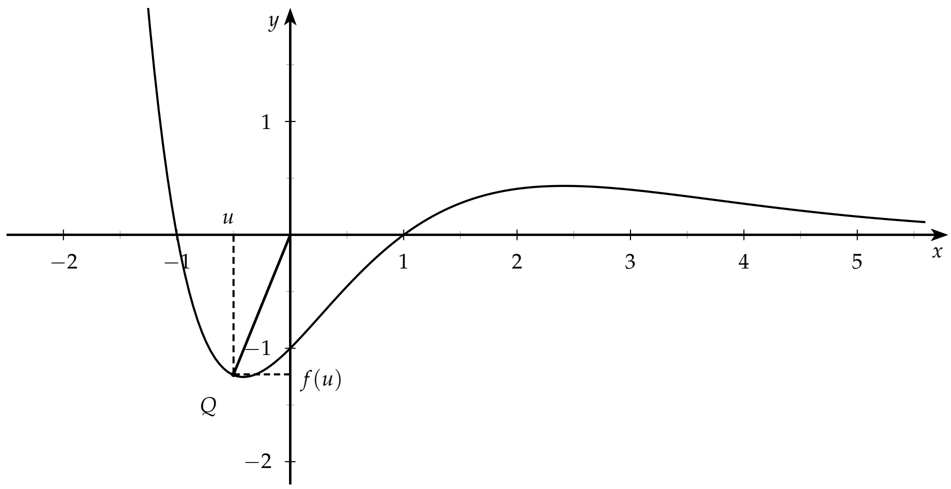
$A = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{2}{e}$

$A = \frac{1}{e}$

Damit ist gezeigt, dass die von der Gerade t und den Koordinatenachsen begrenzte Fläche den Flächeninhalt $A = \frac{1}{e}$ hat.

e) **Bestimmung von u** (3BE)

Skizze:



d sei der gesuchte Abstand vom Punkt Q und dem Koordinatenursprung $O(0|0)$.
Der Abstand lässt sich mithilfe des Satz von Pythagoras in Abhängigkeit von u ausdrücken:

$$(d(u))^2 = u^2 + (f(u))^2$$

$$d(u) = \sqrt{u^2 + (f(u))^2}$$

$$d(u) = \sqrt{u^2 + (u^2-1)^2 \cdot (\mathrm{e}^{-u})^2}$$

Diese Zielfunktion wird mit dem GTR gezeichnet und davon dann die Koordinaten des Hochpunktes abgelesen, da d maximal werden soll. Die x-Koordinate des Extrempunktes ist dann der gesuchte u-Wert.
Der GTR liefert den Punkt $E_{max}(-0,5|1,3)$
Für $u = -0,5$ wird der Abstand des Punktes Q vom Koordinatenursprung O maximal und beträgt dort 1,3 LE.

f) **Berechnung des Flächeninhalts A im dritten Quadranten** (4BE)

Für den Flächeninhalt gilt:

$$A = \left| \int_{x_{N_1}}^{0} f(x)dx \right| = \left| \int_{-1}^{0} (x^2-1)\mathrm{e}^{-x}dx \right|$$

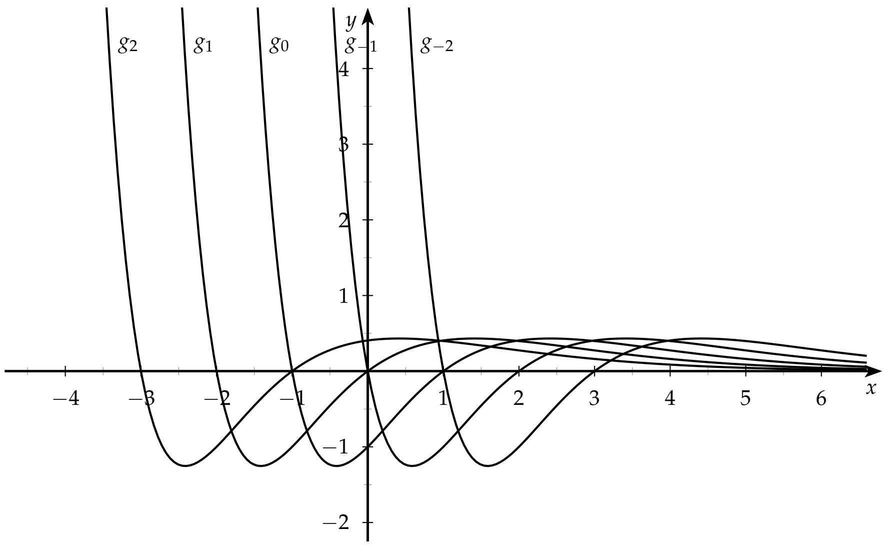
Die Berechnung erfolgt über den GTR, welcher das Ergebnis $A = 1$ liefert.
Die Funktion f und die Koordinatenachsen begrenzen im dritten Quadranten eine Fläche mit dem Flächeninhalt $A = 1$ FE.

Flächeninhalte im dritten Quadranten bei Verwendung einer Periodenfunktion

Die Funktionenschar ist gegeben durch

$y = g_b(x) = f(x+b) = \left[(x+b)^2 - 1\right] \mathrm{e}^{-(x+b)}$

Skizze:



Aus der Skizze ergibt sich:

- Da der Summand b für $-1 < b < 1$ eine Verschiebung des Graphen in Richtung x-Achse bewirkt (für $b < 0$ nach rechts und für $b > 0$ nach links), schließt der Graph der jeweiligen Funktion g_b im dritten Quadranten zusammen mit den Koordinatenachsen eine Fläche vollständig ein
- Für $b \geq 1$ wird der Graph so weit nach links verschoben, dass die Fläche nur noch von der x-Achse begrenzt wird, nicht mehr von beiden Koordinatenachsen
- Für $b \leq -1$ wird der Graph so weit nach rechts verschoben, dass die Fläche nicht mehr im dritten Quadranten liegt