

Spurpunkte einer Geraden

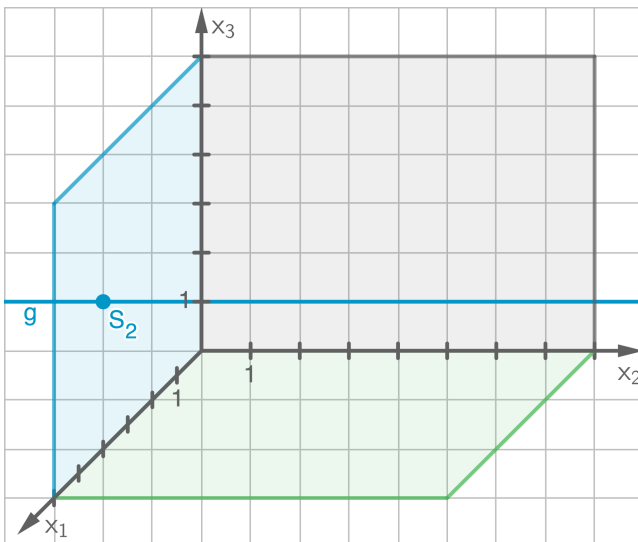
Was sind Schnittpunkte einer Gerade mit einer Ebene im Unterschied zu Spurpunkten? Ein Spurpunkt ist der Schnittpunkt einer Gerade mit einer Koordinatenebene – kurz gesagt: Der Durchstoßpunkt einer Gerade mit einer oder mehrerer der Koordinatenebenen.

Spurpunkte Erklärung

Spurpunkte von Geraden mit den Koordinatenebenen werden in der Regel wie folgt bezeichnet:

- S_1 : Spurpunkt einer Geraden mit der x_2x_3 -Ebene, häufig auch als S_{yz} bezeichnet
- S_2 : Spurpunkt einer Geraden mit der x_1x_3 -Ebene, häufig auch als S_{xz} bezeichnet
- S_3 : Spurpunkt einer Geraden mit der x_1x_2 -Ebene, häufig auch als S_{xy} bezeichnet

Veranschaulichung z.B. an der x_1x_3 -Ebene (Koordinatenebene):



Wie viele Spurpunkte kann eine Gerade haben?

Eine Gerade kann einen Spurpunkt, zwei oder drei Spurpunkte haben. Es existiert genau dann kein Schnittpunkt mit einer der Koordinatenebenen, wenn die Gerade parallel zu dieser Ebene ist. Das ist dann der Fall, wenn der Richtungsvektor der Gerade eine Null enthält. So ist die Gerade

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ parallel zur x_1x_3 -Ebene. Da eine Gerade parallel zu keiner, einer oder zwei

Koordinatenebenen, aber nicht zu allen drei Koordinatenebenen sein kann, existieren zu jeder Gerade also zwischen einem und drei Spurpunkten.

Wie berechnet man Spurpunkte?

Spurpunkte berechnen geht analog dazu, einen Schnittpunkt von Gerade und Ebene zu berechnen, in diesem Fall speziell mit der jeweiligen Koordinatenebene. Wie in obigem Beispiel veranschaulicht wird hier

erklärt, wie der Spurpunkt S_2 berechnet werden kann, also der Schnittpunkt einer Gerade mit der x_1x_3 -Ebene. Die Spurpunkte S_1 und S_3 funktionieren analog.

Die x_1x_3 -Ebene hat die Koordinatengleichung $x_2 = 0$. Der Schnittpunkt der Gerade mit dieser Ebene kann bestimmt werden, indem die x_2 -Komponente der Gerade in die Ebenengleichung der Koordinatenebene eingesetzt, also gleich Null gesetzt wird. Dadurch kann der Parameter der Gerade bestimmt werden. Wird dieser in die Geradengleichung eingesetzt, ergeben sich die Koordinaten des Schnittpunkts der Geraden mit der Koordinatenebene, also den Spurpunkt.

Spurpunkte bestimmen Beispiel

Folgende Aufgaben zeigen anhand von Beispielen, wie man den Spurpunkt berechnen kann.

Aufgabe 1

Berechne die Spurpunkte der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit den Koordinatenebenen.

Lösung 1

Schnittpunkt Gerade Ebene berechnen:

Anhand des Richtungsvektors ist zu erkennen, dass die Gerade drei Spurpunkte mit den Koordinatenebenen hat.

Schnittpunkt mit der x_1x_2 -Ebene

Es gilt $x_3 = 0$, daraus folgt:

$$\begin{aligned} 3 + t \cdot 1 &= 0 \quad | -3 \\ t &= -3 \end{aligned}$$

Eingesetzt in die Geradengleichung ergibt sich der Schnittpunkt S_3 :

$$\overrightarrow{OS_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Spurpunkt: $S_3(-2 \mid -1 \mid 0)$

Schnittpunkt mit der x_1x_3 -Ebene

Es gilt $x_2 = 0$, daraus folgt:

$$\begin{aligned} 2 + t \cdot 1 &= 0 \quad | -2 \\ t &= -2 \end{aligned}$$

Eingesetzt in die Geradengleichung ergibt sich der Schnittpunkt S_2 :

$$\overrightarrow{OS_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Spurpunkt: $S_2(-1 \mid 0 \mid 1)$

Schnittpunkt mit der x_2x_3 -Ebene

Es gilt $x_1 = 0$, daraus folgt:

$$\begin{aligned} 1 + t \cdot 1 &= 0 \quad | -1 \\ t &= -1 \end{aligned}$$

Eingesetzt in die Geradengleichung ergibt sich der Schnittpunkt S_1 :

$$\overrightarrow{OS_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Spurpunkt: $S_1(0 \mid 1 \mid 2)$

Aufgabe 2

Gegeben ist die Gerade $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$. Bestimme die Spurpunkte mit den Koordinatenebenen.

Lösung 2

Zunächst können von der Geraden die Vektoren betrachtet werden. Am Richtungsvektor ist erkennbar, dass dieser nicht in x_2 -Richtung zeigt, es gibt also nur zwei Spurpunkte.

Schnittpunkt mit der x_1x_2 -Ebene

Es gilt $x_3 = 0$, daraus folgt:

$$\begin{aligned} 4 + t \cdot 8 &= 0 \quad | -4 \\ 8t &= -4 \quad | :8 \\ t &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Eingesetzt in die Geradengleichung ergibt sich der Schnittpunkt S_3 mit der Koordinatenebene:

$$\overrightarrow{OS_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Spurpunkt: $S_3(1, 5 \mid 0 \mid 0)$

Schnittpunkt mit der x_2x_3 -Ebene

Es gilt $x_1 = 0$, daraus folgt:

$$\begin{aligned} 2 + t \cdot 1 &= 0 \quad | -2 \\ t &= -2 \end{aligned}$$

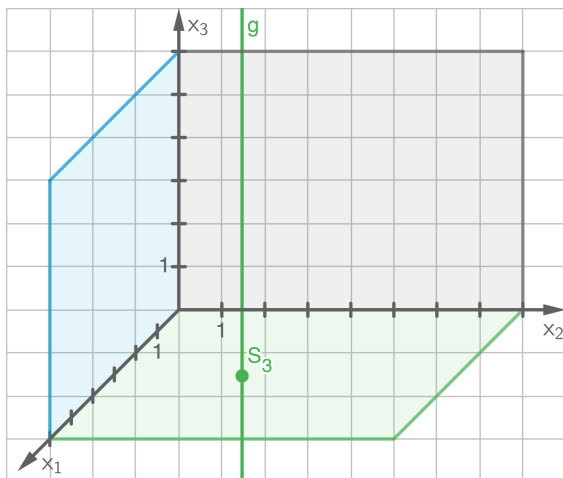
Eingesetzt in die Geradengleichung ergibt sich der Schnittpunkt S_1 mit der Koordinatenebene:

$$\overrightarrow{OS_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -12 \end{pmatrix}$$

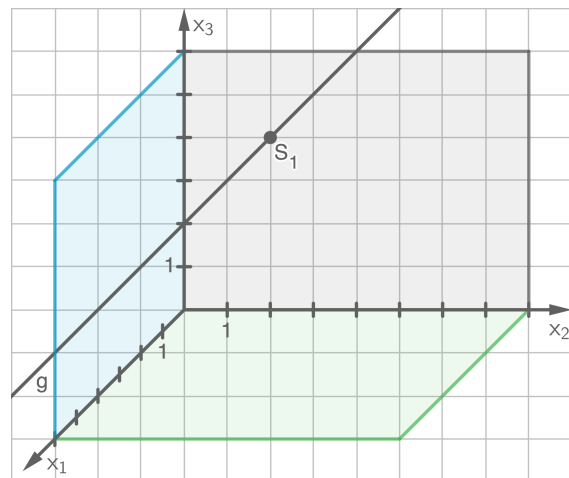
Spurpunkt: $S_1(0 \mid 0 \mid -12)$

Veranschaulichung Durchstoßpunkt Gerade Ebene

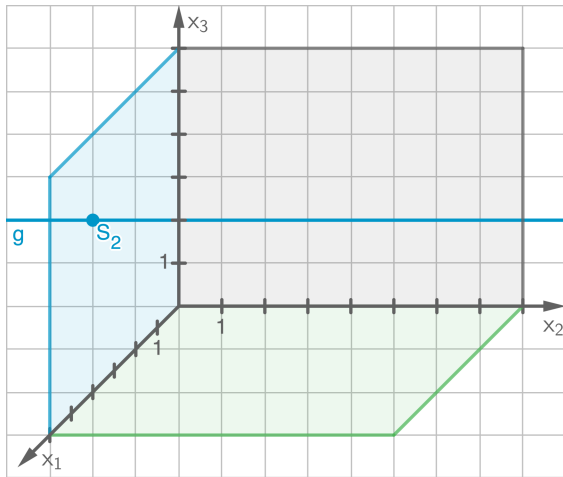
Nochmal zusammenfassend dargestellt, kann eine Gerade bis zu drei Spurpunkten mit den Koordinatenebenen haben:



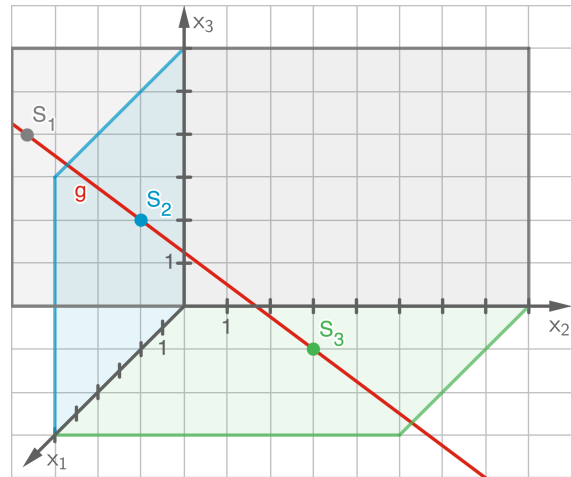
Spurpunkte Beispiel S3



Spurpunkte Beispiel S1



Spurpunkte Beispiel S2



Spurpunkte Beispiel drei Schnittpunkte

Abgrenzung zu einer Spurgerade

So wird in der analytischen Geometrie die Schnittgerade zwischen einer Ebene im Raum und einer Koordinatenebene bezeichnet. Während ein Spurpunkt der Schnitt einer Gerade mit einer Koordinatenebene ist, ist eine Spurgerade der Schnitt einer Ebene mit einer Koordinatenebene.