

3.1.1 ► Jahr mit schnellsten Wachstum berechnen

(5P)

Überlege dir zunächst, was die Funktion h überhaupt beschreibt: h beschreibt die **Höhe** des Baumes. Die Änderungsrate der Höhe ist die Wachstumsgeschwindigkeit. Diese wird durch die erste Ableitung h' beschrieben.

Wenn also nach dem Jahr gesucht ist, in dem der Baum am schnellsten gewachsen ist, so ist nach der Stelle t gesucht, an der die **Wachstumsgeschwindigkeit** h' ein Maximum annimmt: Berechne also das Maximum der ersten Ableitung. Dies ist zugleich eine **Wendestelle** von h .

Du kannst so vorgehen:

- Definiere die ersten drei Ableitungen von h in deinem GTR.
- Für ein Maximum x_M von h' muss gelten
 - Notwendiges Kriterium $h''(x_M) = 0$,
 - hinreichendes Kriterium $h'''(x_M) < 0$.
- Ermittle auf diese Weise das Maximum von h' . Diese Stelle t gibt dir das Jahr seit Pflanzung an, zu dem der Baum am schnellsten gewachsen ist. Achte darauf, dass die Pflanzung im Frühling 1930 liegt.

1. Schritt: Ableitungen definieren

Definiere zunächst die Funktion h in deinem GTR unter $Y=$. Den Befehl für „Ableiten“ findest du unter

```
MATH → 8:nDerive()
```

Du benötigst die ersten drei Ableitungen.

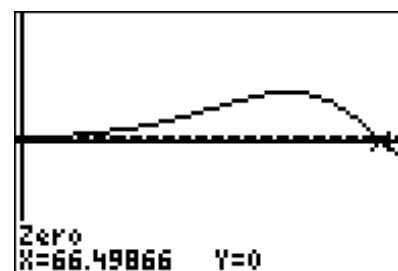
```
Plot1 Plot2 Plot3
Y1=
Y2 = d/dx(Y1)|x=X
Y3 = d/dx(Y2)|x=X
Y4 = d/dx(Y3)|x=X
Y5 =
```

2. Schritt: Maximum der ersten Ableitung berechnen

Ermittle zunächst die potentiellen Extremstellen von h' : Lass dazu das Schaubild von h'' zeichnen und wähle im Graph-Modus unter

```
CALC → 2:zero
```

die entsprechende Option aus, um Nullstellen zu bestimmen.



Der GTR liefert eine potentielle Extremstelle von h' bei $t \approx 66,5$.

Bestimme anschließend die **Art** der Extremstelle, indem du den Verlauf des Schaubildes von h'' vor und nach der Stelle $t = 66,5$ betrachtest.

Bevor das Schaubild die x -Achse schneidet, ist dieses überhalb der x -Achse. Nach der Nullstelle befindet es sich unterhalb der x -Achse. Das heißt, dass die Steigung von h' vor der Extremstelle positiv ist und danach negativ. Daraus kannst du folgern, dass es sich bei $t = 66,5$ um das gesuchte Maximum der Funktion h' handelt.

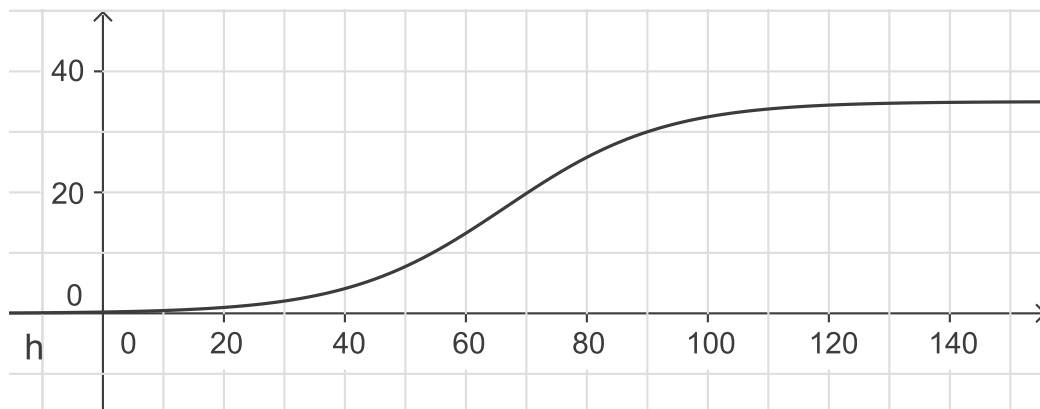
Die Pflanzung war im Frühling 1930 und die Zeit t wird abgetragen in Jahren seit Pflanzung. Die Stelle $t = 66,5$ entspricht also dem Herbst 1996.

Im Jahr (genauer: im Herbst) 1996 ist der Baum am schnellsten gewachsen.

► **Zeitpunkt bestimmen, zu dem der Baum zu 75 % ausgewachsen war**

Nun geht es wieder um die Höhe des Baumes, d.h. um die Funktion h . Du sollst den Zeitpunkt t bestimmen, zu dem der Baum zu 75 % ausgewachsen war. Hier stellt sich jedoch die Frage: Wie groß wird der Baum eigentlich?

Hierzu ist es wichtig, dass du das Schaubild von h in deinem GTR anzeigen lässt und es näher betrachtest. Dann erkennst du nämlich, dass die Funktionswerte von h – also die Höhe des Baumes – einer **oberen Grenze** annähern:



Der Baum wird also auch im Modell nicht unendlich groß, sondern nähert einem festen Wert, einem **Grenzwert** an. Dieser Grenzwert beschreibt die maximale Höhe des Baumes.

Du kannst jetzt so vorgehen:

- Berechne im ersten Schritt mit deinem GTR den Grenzwert von $h(t)$ und erhalte so die maximale Höhe des Baumes.
- Bestimme dann, wie groß der Baum ist, wenn er 75 % dieser Höhe erreicht hat.
- Ermittle zuletzt den zugehörigen Zeitpunkt t , indem du die Höhe für $h(t)$ einsetzt und nach t auflöst.

1. Schritt: Grenzwert von $h(t)$ ermitteln

Du möchtest wissen, wie sich die Funktionswerte $h(t)$ für große Werte von t verhalten. In Formeln ausgedrückt suchst du:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t).$$

Betrachte den Funktionsterm der Funktion h mit:

$$h(t) = \frac{35}{160 \cdot e^{-0,07632 \cdot t} + 1} = \frac{35}{160 \cdot \frac{1}{e^{0,07632 \cdot t}} + 1}; t \geq 0.$$

Du weißt außerdem, dass der Term e^t für keinen t -Wert kleiner oder gleich Null werden kann.

Setzt du nun sehr große Werte für t ein ($t \rightarrow \infty$), so gilt für den e-Term:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-0,07632 \cdot t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{0,07632 \cdot t}} = 0.$$

Das heißt, für den gesamten Funktionsterm von h gilt:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{35}{160 \cdot e^{-0,07632 \cdot t} + 1} = \frac{35}{160 \cdot 0 + 1} = \frac{35}{1} = 35.$$

Der Grenzwert liegt bei 35. Damit weißt du: Der Baum wird im Modell maximal 35 m hoch.

2. Schritt: Höhe des zu 75 % ausgewachsenen Baumes und Zeitpunkt berechnen

Ausgewachsen ist der Baum 35 m hoch. Wenn er zu 75 % ausgewachsen ist, dann ist er also:

$$0,75 \cdot 35 \text{ m} = 26,25 \text{ m hoch.}$$

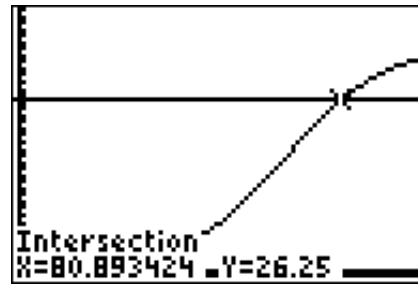
Gesucht ist nun der Zeitpunkt, zu dem der Baum diese Höhe erreicht. Das ist der Zeitpunkt t_0 , für den gilt: $h(t_0) = 26,25$. Dazu kannst du das **graphische Lösen** einer Gleichung anwenden:

Definiere im GTR eine zur x-Achse parallele Gerade mit der Geradengleichung $y = 26,25$. Die Schnittstelle dieser Geraden mit dem Schaubild von h entspricht dann t_0 . Diesen kannst du im Graph-Modus über

CALC \rightarrow 5:intersect

bestimmen. Der GTR liefert die Lösung $t_0 \approx 80,89$.

Damit weißt du: Im 81. Jahr nach der Pflanzung im Frühling 1930, d.h. Anfang des Jahres 2011, war der Baum zu 75 % ausgewachsen.



3.1.2 ► Durchschnittliches Jahreswachstum der letzten 10 Jahre bestimmen

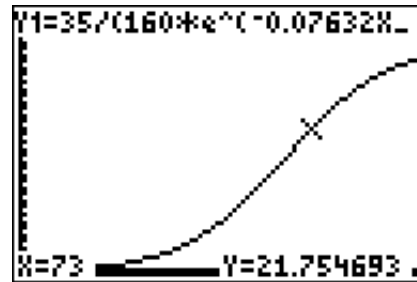
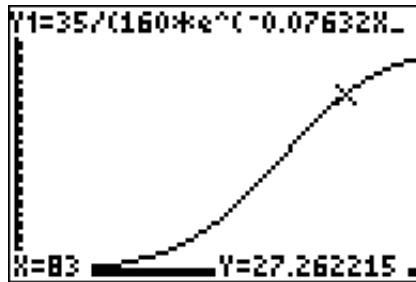
(2P)

Die Funktion h beschreibt die **Höhe** des Baumes. In dieser Aufgabe ist nach dem durchschnittlichen Jahreswachstum des Baumes gefragt. Du sollst also berechnen, um welche Höhe der Baum innerhalb der 10 Jahre **im Schnitt** pro Jahr gewachsen ist. Ein anderer Begriff für die gesuchte Größe ist die **durchschnittliche Änderungsrate**.

Die „letzten zehn Jahre“ bezeichnen dabei den Abschnitt von 2003 bis 2013. Du kannst so vorgehen:

- Berechne, wie hoch der Baum im Jahr 2003 und im Jahr 2013 war.
- Bilde die Differenz der beiden Werte: Damit weißt du, um welche Höhe der Baum in 10 Jahren gewachsen ist.
- Teile die Differenz durch die vergangene Zeit, nämlich die 10 Jahre.
- *Alternativ* kannst du auch die Formel für die durchschnittliche Änderungsrate verwenden: $s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{h(a) - h(b)}{a - b}$, wobei a und b die beiden betrachteten Zeitpunkte 2003 bzw. 2013 sind.

Das Jahr 2003 entspricht dem Wert $t = 73$, das Jahr 2013 dem Wert $t = 83$. Berechne $h(83)$ und $h(73)$ und erhalte so die Höhe des Baumes in den Jahren 2003 und 2013. Bilde anschließend die Differenz der Werte und teile diese durch die vergangene Zeit, nämlich 10.



Daraus ergibt sich folgende Änderungsrate:

$$s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{h(a) - h(b)}{a - b} = \frac{27,2622 - 21,7547}{10} \approx 0,55.$$

Der Baum ist in den letzten 10 Jahren um durchschnittlich 0,55 m pro Jahr gestiegen.

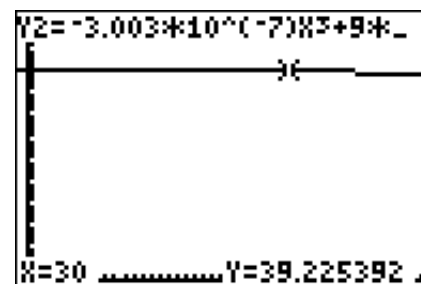
3.2.1 ► Durchmesser der Schnittfläche berechnen

(3P)

Die Funktion d gibt dir den Durchmesser des Baumstamms an, wobei x die Höhe in cm über dem Boden ist und $d(x)$ der Durchmesser, ebenfalls in cm. Laut Aufgabenstellung wird der Baum in diesem Jahr in einer Höhe von 30 cm gefällt.

Gesucht ist der Durchmesser der Schnittfläche, d.h. den Durchmesser d des Baumstamms in der Höhe 30 cm.

Definiere die Funktion d in deinem GTR. Gesucht ist der Funktionswert von d für $x = 30$. Berechne also $d(30)$. Setze $x = 30$ in den Funktionsterm von d ein und berechne.



Den entsprechenden Befehl dazu findest du unter

CALC → 1:value

Der GTR liefert $d(30) \approx 39,23$.

Der Durchmesser der Schnittfläche beträgt etwa 39,23 cm.

► Länge des abgeschnittenen Stamms berechnen

Beachte, dass die Aufgabenstellung mit „aus diesem Modell“ betont, dass auch hier mit der Funktion d gerechnet werden soll, **nicht** mit der Funktion h . Du weißt, dass der Baum 30 cm über dem Boden abgeschnitten wurde, doch die Höhe des Baumes ist unbekannt. Diese kannst du allerdings mit der Funktion d ermitteln:

d gibt dir den **Durchmesser** des Baumes an. Der Baum endet in einer **Spitze**, nach oben hin wird sein Durchmesser also immer **kleiner**. Im Modell entspricht die Spitze einem **Punkt** mit Durchmesser Null.

Bestimme also zunächst die Stelle x , an welcher der Durchmesser den Wert Null annimmt. Beachte, dass x in cm angegeben ist und deshalb einen sehr großen Wert annehmen kann.

Nachdem du so die Höhe des Baumes nach dem Modell d ermittelt hast, kannst du noch die 30 cm abziehen, die am Boden stehen bleiben. So erhältst du die Länge des Stamms.

1. Schritt: Höhe des Baums bestimmen

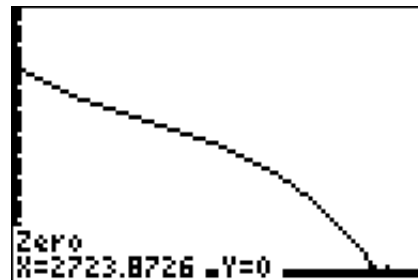
Gesucht ist die Höhe des Baums, auf der der Durchmesser des Baums Null wird, in Formeln:

$$d(x) = 0.$$

Löse diese Gleichung nach x auf und erhalte so die Höhe des Baums.

Lass dazu die Funktion d im Graph-Modus anzeigen und wähle unter `CALC → 2:zero` den Befehl zur Bestimmung von Nullstellen aus.

Der GTR liefert $x = 2.723,87$.



Das bedeutet: Nach dem Modell, das die Funktion d beschreibt, ist der Baum 2.723,87 cm hoch. Dies entspricht etwa 27,24 m.

2. Schritt: Länge des Stamms berechnen

Der Stamm wird auf einer Höhe von 30 m abgesägt. Diese 30 cm musst du von der Höhe des Baums abziehen, um die Länge des Stamms zu erhalten:

$$27,24 \text{ m} - 0,3 \text{ m} = 26,94 \text{ m}.$$

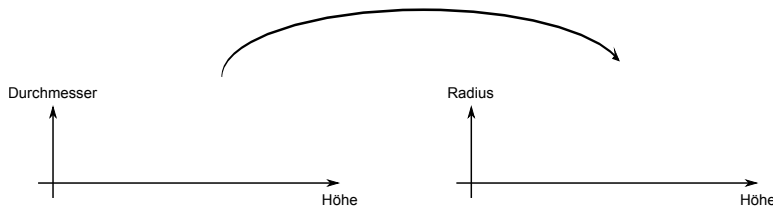
Der Baumstamm ist etwa 26,94 m lang.

3.2.2 ► Volumen des Stamms ermitteln

(5P)

Wenn ein Volumen berechnet werden muss, dann läuft die Rechnung häufig auf einen **Rotationskörper** hinaus. Dies ist auch in diesem Aufgabenteil der Fall. Überlege dir, was die Funktion d genau tut: Auf der x -Achse ist die **Höhe** des Stamms abgetragen und auf der y -Achse der zugehörige Durchmesser.

Gesucht ist also **nicht** das Rotationsvolumen von d . Wenn nämlich der **Durchmesser** um die x -Achse rotiert, so ergibt sich ein Baum, der doppelt so dick ist. Es ist der **Radius**, der um die x -Achse rotieren muss, damit sich als Rotationskörper der richtige Baum ergibt.



Du kannst jetzt so vorgehen:

- Bestimme – ausgehend von d – eine Funktion r , welche dir den Radius des Baumes in Abhängigkeit der Höhe x angibt.
- Du weißt bereits, in welcher Höhe der Stamm beginnt und in welcher Höhe er endet. Diese beiden Stellen sind deine Integralgrenzen.

- Berechne über die Formel $V = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2 dx$ das Volumen des Rotationskörpers und damit das Volumen des Stamms. Beachte, dass sich hier ein Ergebnis in cm^3 ergibt.

1. Schritt: Funktion r bestimmen, die den Radius beschreibt

Du weißt, dass der Radius gerade der halbe Durchmesser ist. Die Funktion d gibt den Durchmesser an. Für eine Funktion r , die den Radius beschreibt, gilt also:

$$r(x) = \frac{1}{2}d(x).$$

2. Schritt: Volumen V des Rotationskörpers berechnen

Der Baum wird auf einer Höhe von 30 cm abgeschnitten und endet auf einer Höhe von 2.724 cm.

Dies sind die **Grenzen** deines Rotationskörpers, innerhalb dieser Grenzen muss das Schaubild von r rotieren, damit sich als Rotationskörper der Stamm ergibt.

Setze also $a = 30$, $b = 2.724$ und $r(x)$ in die Formel zur Berechnung des Rotationsvolumens ein. Definiere die Funktion $(\frac{1}{2}d(x))^2$ direkt als $Y1$, sodass du sie leichter in das Integral einsetzen kannst. Die Vorlage für das Integral findest du dabei unter

Math → 9: fnInt.

$$\pi * \int_{30}^{2724} (Y1) dx = 1397926.65$$

Der GTR liefert das Volumen $V = 1.397.927 \text{ cm}^3$.

Gefragt ist nach dem Volumen in Kubikmeter. Du weißt, dass 1 m genau 100 cm entspricht. Also weißt du auch weiter:



$$\begin{aligned}1 \text{ m} &= 100 \text{ cm} && | ()^3 \\(1 \text{ m})^3 &= (100 \text{ cm})^3 \\1 \text{ m}^3 &= 1.000.000 \text{ cm}^3\end{aligned}$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned}V &= 1,39793 \cdot 10^6 \text{ cm}^3 \\&= 1,39793 \cdot 1.000.000 \text{ cm}^3 && | : 1.000.000 \\&= 1,39793 \text{ m}^3\end{aligned}$$

Das Volumen des Baumstamms beträgt etwa $1,3979 \text{ m}^3$.

► Geschätztes Volumen und prozentuale Abweichung berechnen

Aus der Aufgabenstellung weißt du, dass der Stamm vorab als **Kreiskegel** betrachtet wurde, wobei

- die Länge des Stamms (30 m) der **Höhe** des Kegels entspricht,
- der Durchmesser des Stamms (40 cm) dem Durchmesser des Kegels entspricht, also dem doppelten Radius.

Für das Volumen V_K eines Kreiskegels gilt:

$$V_K = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h,$$

wobei h die Höhe und r der Radius des Kreiskegels ist. Setze die gegebenen Werte ein und berechne das Volumen. Bestimme anschließend die prozentuale Abweichung zum oben ermittelten Volumen.

1. Schritt: Geschätztes Volumen berechnen

$$\begin{aligned}V_K &= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (20 \text{ cm})^2 \cdot (30 \text{ m}) \\&= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (0,2 \text{ m})^2 \cdot (30 \text{ m}) \\&\approx 1,2566 \text{ m}^3\end{aligned}$$

Das geschätzte Volumen beläuft sich auf etwa $1,257 \text{ m}^3$.

2. Schritt: Prozentuale Abweichung berechnen

Das oben ermittelte Volumen des Stamms hast du oben berechnet: $V = 1,3979 \text{ m}^3$. Du sollst die prozentuale Abweichung des geschätzten Volumens **vom** oben ermittelten Volumen berechnen; das oben ermittelte Volumen ist also der **Grundwert** und entspricht 100%. Für den prozentuale **Anteil** W ergibt sich:

$$\begin{aligned}W &= \frac{V_K}{V} \cdot 100 \% \\&= \frac{1,257}{1,3979} \cdot 100 \% \\&= 89,92 \%\end{aligned}$$



Also entspricht das geschätzte Volumen 89,92 % des oben ermittelten Volumens.
Damit weißt du auch: Das geschätzte Volumen weicht um etwa 10,08 % vom oben ermittelten Volumen ab.