1. a) ▶ **Vierfeldertafel erstellen** (4P)

Aus der Aufgabenstellung erhältst du die Werte

- 12 % der Wahlberechtigten sind Jungwähler, also $P(J) = 0,12$ und $P(\overline{J}) = 0,88$
- 44 % der Wahlberechtigten haben sich bereits für einen Kandidaten entschieden, also $P(K) = 0,44$ und $P(\overline{K}) = 0,56$
- Jeder Siebte derjenigen, die sich noch **nicht** für einen Kandidaten entschieden haben. Hier hast du eine **bedingte Wahrscheinlichkeit** gegeben: $P_{\overline{K}}(J) = \frac{1}{7}$

Du kannst so vorgehen: Berechne anhand der drei Wahrscheinlichkeiten z.B. den Wert für $P(\overline{K} \cap J)$ und fülle so die Vierfeldertafel aus.

1. Schritt: Schnittwahrscheinlichkeit berechnen

Für die bedingte Wahrscheinlichkeit gilt:

$$P_{\overline{K}}(J) = \frac{P(\overline{K} \cap J)}{P(\overline{K})} \qquad \text{Werte einsetzen}$$

$$\frac{1}{7} = \frac{P(\overline{K} \cap J)}{0,56} \qquad | \cdot 0,56$$

$$\frac{1}{7} \cdot 0,56 = P(\overline{K} \cap J)$$

$$0,08 = P(\overline{K} \cap J)$$

1. Schritt: Vierfeldertafel ausfüllen

	J	$\overline{J}$	Summe
K			0,44
$\overline{K}$	0,08		0,56
Summe	0,12	0,88	1

Die Werte in den inneren vier Feldern müssen in der Summe die Werte in den äußeren Feldern ergeben und zwar zeilenweise und spaltenweise:

	J	$\overline{J}$	Summe
K	**0,04**	**0,4**	0,44
$\overline{K}$	0,08	**0,48**	0,56
Summe	0,12	0,88	1

b) ▶ **Ungleichung nachweisen** (3P)

In der Ungleichung stehen zwei bedingte Wahrscheinlichkeiten; du kannst sie zunächst beide berechnen und dann in die Ungleichung einsetzen. Wenn sich eine wahre Aussage ergibt, dann hast du ihre Gültigkeit nachgewiesen.

Beachte dabei:
$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

1. Schritt: Wahrscheinlichkeiten berechnen

$$\begin{aligned} P_J(\overline{K}) &= \frac{P(J\cap\overline{K})}{P(J)} \\ &= \frac{0,08}{0,12} \\ &= \frac{2}{3} \approx 0,6666 \\ P_{\overline{J}}(\overline{K}) &= \frac{P(\overline{J}\cap\overline{K})}{P(\overline{J})} \\ &= \frac{0,48}{0,88} \\ &= \frac{6}{11} \approx 0,5455 \end{aligned}$$

2. Schritt: Werte einsetzen

Einsetzen liefert:

$$\begin{aligned} P_J(\overline{K}) &> P_{\overline{J}}(\overline{K}) \\ \frac{2}{3} &> \frac{6}{11} \\ 0,6666 &> 0,5455 \end{aligned}$$

Die Ungleichung stimmt. Damit hast du ihre Gültigkeit nachgewiesen.

► Sinnhaftigkeit der Entscheidung begründen

Überlege zunächst, welche Aussage die Ungleichung im Sachzusammenhang formuliert. Überlege dann, warum eine Konzentration auf die Jungwähler nicht die richtige Maßnahme wäre.

$P_J(\overline{K}) = \frac{2}{3}$: Ein Wahlberechtigter, der Jungwähler ist, hat sich mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 66,66 % noch nicht für einen Kandidaten entschieden.

$P_{\overline{J}}(\overline{K}) = \frac{2}{3}$: Ein Wahlberechtigter, der kein Jungwähler ist, hat sich mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 54,55 % noch nicht für einen Kandidaten entschieden.

Rein aus diesem Verhältnis heraus könnte man argumentieren: Im Wahlkampf müssen vor allem die Jungwähler angegangen werden. Betrachte allerdings deren Anteil an allen Wahlberechtigten: Er liegt bei etwa 12 %.

Damit sollte man sich im Wahlkampf nicht vorwiegend auf Jungwähler konzentrieren, weil sie nur einen eher geringen Teil aller Wahlberechtigten ausmachen.

c) ► **Wahrscheinlichkeit berechnen** (3P)

Sei X die Zufallsvariable, die die Anzahl der Jungwähler unter den Befragten beschreibt. X kann als binomialverteilt angenommen werden denn

- entweder ein Befragter ist Jungwähler oder nicht,
- die Wahrscheinlichkeit für einen Jungwähler wird bei jedem Befragten als gleich angenommen.

Laut Aufgabenstellung sind 12 % aller Wahlberechtigten Jungwähler. 48 Personen werden befragt. Also sind die Parameter der Binomialverteilung $n = 48$ und $p = 0,12$.

Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit für genau 6 Jungwähler, also $P(X = 6)$:

$$\begin{aligned} P(X=6) &= \binom{48}{6} \cdot (0,12)^6 \cdot (1-0,12)^{48-6} \\ &= \binom{48}{6} \cdot 0,12^6 \cdot 0,88^{42} \approx 0,1707 \end{aligned}$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 17,07 % befinden sich unter den Befragten genau 6 Jungwähler.

2. a) ► **Entscheidungsregel bestimmen** (5P)

Getestet werden soll die Nullhypothese $H_0 : p_0 \leq 0,5$ in einer Stichprobe von 200 Wahlberechtigten und auf einem Signifikanzniveau von 5 %.

Sei Y die Zufallsgröße, die die Anzahl der Stimmen für den Kandidaten beschreibt. Y kann ähnlich wie oben als binomialverteilt angenommen werden; bei wahrer Nullhypothese ist Y binomialverteilt mit $n = 200$ und $p = 0,5$.

Die Nullhypothese wird abgelehnt, wenn **sehr viele** Wahlberechtigte angeben, den Kandidaten zu wählen. Also hat der Ablehnungsbereich $\overline{A}$ die Form

$\overline{A} = \{k\,;\,\dots\,;\,200\}$,

wobei k eine natürliche Zahl und die untere Grenze des Ablehnungsbereichs ist.

Das Signifikanzniveau soll 5 % betragen. Das heißt: Bei wahrer Nullhypothese soll mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens 5 % ein Ereignis aus dem Ablehnungsbereich eintreten:

$$\begin{aligned} P(Y \geq k) &\leq 0,05 \\ 1 - P(Y \leq k-1) &\leq 0,05 \\ P(Y \leq k-1) &\geq 0,95 \end{aligned}$$

Betrachte eine Tabelle zur kumulierten Binomialverteilung für $n = 200$ und $p = 0,5$ und suche nach dem Wert für k, für den die Ungleichung erstmals erfüllt ist:

$$\begin{aligned} P(Y \leq 110) &= 0,9313 < 0,95 \\ P(Y \leq 111) &= 0,9418 < 0,95 \\ P(Y \leq 112) &= 0,9616 > 0,95 \end{aligned}$$

Also ist

$k - 1 = 112$ und damit $k = 113$.

Du erhältst den Ablehnungsbereich $\overline{A} = \{113; \dots; 200\}$ und damit die Entscheidungsregel:

Wenn mindestens 113 der Wahlberechtigten angeben, dass sie den Kandidaten wählen, so wird die Nullhypothese $H_0 : p_0 \leq 0,5$ abgelehnt.

b) ▸ **Wahl der Nullhypothese begründen** (3P)

Überlege, wie eine Nullhypothese generell gewählt wird: Sie ist die Hypothese, die man eigentlich verwerfen möchte.

Dies hat den Hintergrund, dass die eigene Hypothese nicht vorschnell akzeptiert werden soll.

Betrachte also die Nullhypothese und das Anliegen der Beraterin. Die Beraterin ist natürlich an einem **möglichst hohen** Stimmenanteil ihres Kandidaten interessiert. Deshalb würde sie, falls nötig, auch eine Kampagne starten, die mit großen Kosten verbunden ist. Indem sie die Hypothese $H_0 : p_0 \leq 0,5$ testet, will sie vermeiden, dass die eigene Hypothese, nämlich dass der Kandidat **mehr** als die Hälfte der Stimmen bekommt, vorschnell akzeptiert und die Kampangne damit irrtümlicherweise **nicht** durchgeführt wird.

3. a) ▸ **Wahrscheinlichkeiten berechnen** (4P)

Überlege, was du aus der Aufgabenstellung weißt:

- Insgesamt gibt es **8** Stadträtinnen und **4** Stadträte, also insgesamt 12 Personen, die zur Auswahl stehen.
- Aus diesen 12 Personen werden nun **3** für den Ausschuss ausgewählt.

Hier bei handelt es sich offensichtlich um ein Ziehen ohne Zurücklegen, denn eine Person kann nur einmal im Ausschuss sitzen. Du kannst die gesuchte Wahrscheinlichkeit also über die **hypergeometrische Verteilung** berechnen.

Beachte dabei: X beschreibt die Anzahl der weiblichen Ausschussmitglieder. Da die Partei drei Sitze besetzen darf, kann X maximal den Wert 3 annehmen.

Deshalb müssen die Wahrscheinlichkeiten $P(X = 0)$, $P(X = 1)$, $P(X = 2)$, $P(X = 3)$ in der Summe 1 ergeben.

Betrachte die **günstige** Situation für $X = 1$: Es werden ins gesamt 3 aus 12 Personen gezogen, und zwar 1 aus 8 Stadträtinnen und 2 aus 4 Stadträten, also:

$$\begin{aligned} P(X=1) &= \frac{\binom{8}{1} \cdot \binom{4}{2}}{\binom{12}{3}} \\ &= \frac{8 \cdot 6}{220} \\ &= \frac{48}{220} = \frac{12}{55} \end{aligned}$$

Nutze nun aus, dass X eine Zufallsvariable ist und du bereits drei von vier Wahrscheinlichkeiten kennst:

$$
\begin{aligned}
P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3) &= 1\\
\frac{1}{55}+\frac{12}{55}+P(X=2)+\frac{14}{55} &= 1\\
\frac{27}{55}+P(X=2) &= 1 \qquad \Big|-\frac{27}{55}\\
P(X=2) &= \frac{28}{55}
\end{aligned}
$$

Es folgt $P(X=1)=\frac{12}{55}$ und $P(X=2)=\frac{28}{55}$.

b) ▸ **Erwartungswert und Varianz berechnen** (3P)

Seien x_i die möglichen Ereignisse und $P(X=x_i)$ die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten, $i=1,..,n$. Dann gilt für den Erwartungswert $E(X)$ und die Varianz $V(X)$:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(X=x_i)$$

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 \cdot P(X=x_i)$$

In unserem Fall kennst du die vollständige Wahrscheinlichkeitsverteilung:

x_i	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{55}$	$\frac{12}{55}$	$\frac{28}{55}$	$\frac{14}{55}$

Berechne nun $E(X)$ und $V(X)$:

$$E(X) = 0\cdot\frac{1}{55}+1\cdot\frac{12}{55}+2\cdot\frac{28}{55}+3\cdot\frac{14}{55}=2$$

$$V(X) = (0-2)^2\cdot\frac{1}{55}+(1-2)^2\cdot\frac{12}{55}+(2-2)^2\cdot\frac{28}{55}+(3-2)^2\cdot\frac{14}{55}=\frac{30}{55}=\frac{6}{11}$$

Es folgt:

$E(X)=2$ und $V(X)=\frac{6}{11}$

c) ▸ **Erwartungswert und Varianz berechnen** (4P)

Y ist binomialverteilt. Für den Erwartungswert $E(Y)$ und die Varianz $V(Y)$ gilt dann:

$E(Y)=n\cdot p$ und $V(Y)=n\cdot p\cdot(1-p)$.

Einsetzen liefert:

$$E(Y) = 3\cdot\tfrac{2}{3}=2$$

$$V(Y) = 3\cdot\tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{1}{3}=\tfrac{2}{3}$$

Die Erwartungswerte der beiden Zufallsgrößen X und Y stimmen überein. Betrachte die Varianzen; bestimme dazu zum Beispiel die zugehörige Dezimalzahl:

$V(X)=\frac{6}{11}\approx 0,5455$, und $V(Y)=\frac{2}{3}\approx 0,6666$

Damit hast du gezeigt: Y hat den gleichen Erwartungswert wie X, aber eine größere Varianz.

► Ungleichung an der Abbildung erläutern

Die Varianz ist ein Maß für die **Streuung** der Werte, die eine Zufallsvariable annimmt. Je kleiner die Varianz, desto mehr konzentrieren die getroffenen Werte um den Erwartungswert.

Entsprechen ist der Unterschied zwischen den Wahrscheinlichkeiten für den Erwartungswert und für andere Werte **größer** je **kleiner** die Varianz ist.

Umgekehrt: Je größer die Varianz, desto besser sind die getroffenen Werte verteilt; die Wahrscheinlichkeit für den Erwartungswert ist also relativ geringer als bei einer Zufallsgröße mit größerer Varianz.

Dies kannst du beim Vergleich der beiden Abbildungen sehen: Bei Zufallsvariable X ist der Balken für den Erwartungswert höher als bei Y und die restlichen drei Balken sind vergleichsweise kleiner als bei Y.

Der Balken für den Erwartungswert ist bei Zufallsgröße X um einiges prominenter als bei Zufallsgröße Y.