a) **► Angeben je einer Geradengleichung für die Blickrichtung beider Astronomen** (7P)

Im Moment der Entdeckung des Meteoriten blicken beide Astronomen entlang je einer Geraden zu dem Meteoriten. In diesem Aufgabenteil sollst du die Geradengleichungen dieser beiden Geraden bestimmen. Die dazu nötigen Informationen entnimmst du dem Aufgabentext.

Eine Geradengleichung besteht im Allgemeinen aus einem Stützvektor, dies ist der Ortsvektor eines beliebigen Punktes, der auf der Geraden liegt, und einem Richtungsvektor, der die Richtung der Geraden beschreibt. Da beide Geraden die jeweilige Blickrichtung der Astronomen beschreiben sollen, kannst du die Ortsvektoren ihrer Standpunkte A und B als Stützvektoren der Geraden verwenden und die Vektoren u_1 und u_2 als Richtungsvektoren.

► Bestimmen der Koordinaten des Punktes P_1

Im Moment der Entdeckung befindet sich der Meteorit im Punkt P_1. Deine Aufgabe ist es nun die Koordinaten dieses Punktes P_1 zu bestimmen.
Da der Meteorit zu diesem Zeitpunkt von beiden Astronomen gesehen wird, muss er sowohl auf der Geraden g als auch auf der Geraden h liegen. P_1 ist also genau der Schnittpunkt der beiden Geraden. Um diesen zu bestimmen musst du g mit h gleichsetzen und anschließend das daraus entstehende LGS lösen.

b) **► Bestimmen der Geschwindigkeit v des Meteoriten** (10P)

Der Meteorit bewegt sich gleichförmig auf einer geradlinigen Bahn. Eine Minute nach seiner Entdeckung hat er den Punkt $P_2(35\,|\,30\,|\,15)$ erreicht. Hier ist es nun deine Aufgabe die Geschwindigkeit v des Meteoriten in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ zu bestimmen.
Der Abstand des Punktes P_1 zum Punkt P_2 entspricht der Strecke, in Kilometer, die der Meteorit in einer Minute zurückgelegt hat, also der Geschwindigkeit v in $\frac{\text{km}}{\text{min}}$. Diese musst du dann noch mit $60\,\frac{\text{min}}{\text{h}}$ multiplizieren um die Geschwindigkeit v des Meteoriten in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ zu erhalten.
Der Abstand der beiden Punkte P_1 und P_2 ist definiert durch den Betrag des Vektors $\overrightarrow{P_1P_2}$. Für den Betrag eines Vektors $\overrightarrow{x}$ gilt allgemein:

$$|\overrightarrow{x}| = \left|\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

▶ Berechnen des Aufschlagpunkts P_3

In diesem Aufgabenteil sollst du nun den Aufschlagpunkt P_3 des Meteoriten auf der Erdoberfläche berechnen.
Die Erdoberfläche wird dabei durch die x-y-Ebene beschrieben. Alle Punkte dieser Ebene haben daher die z-Koordinate Null. Du musst also zunächst mit Hilfe des zuvor bestimmten Vektors $\overrightarrow{P_1P_2}$ eine Geradengleichung p für die Flugbahn des Meteoriten aufstellen. Dann setzt du in diese $z = 0$ ein und bestimmst die dazu passende x- und y-Koordinate. Damit hast du die Koordinaten des Aufschlagpunkt P_3 bestimmt, dieser entspricht nämlich dem Schnittpunkt von p und der Erdoberfläche.

Du gehst also so vor:

1. Schritt: Aufstellen der Geradengleichung von p
2. Schritt: Bestimmen der Koordinaten von P_3

▶ Berechnen des Aufschlagwinkels α

Hier ist es nun deine Aufgabe den Aufschlagwinkel α des Meteoriten zu berechnen. Dieser entspricht dem Schnittwinkel zwischen der x-y-Ebene und der Geraden p. Um diesen zu bestimmen, benötigst du einen Normalenvektor $\overrightarrow{n}$ der x-y-Ebene. Da diese sich nur in x-y-Richtung verläuft, ist jeder Vektor, der Parallel zur z-Achse gerichtet ist, ein Normalenvektor der x-y-Ebene. Wähle für $\overrightarrow{n}$ also zum Beispiel:

$$\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Da $\overrightarrow{n}$ senkrecht zur x-y-Ebene ist, entspricht der Winkel β zwischen $\overrightarrow{n}$ und p genau $\beta = 90° - \alpha$. Sei $\overrightarrow{m}$ der Richtungsvektor von p so gilt für β:

$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{|\overrightarrow{n} \circ \overrightarrow{m}|}{|\overrightarrow{n}| \cdot |\overrightarrow{m}|}\right)$$

Berücksichtigst du nun noch die für Sinus und Kosinus geltende Regeln, so folgt:

$$\cos(\beta) = \sin(90° - \beta) = \sin(\alpha)$$

Für den gesuchten Winkel α gilt daher:

$$\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{|\overrightarrow{n} \circ \overrightarrow{m}|}{|\overrightarrow{n}| \cdot |\overrightarrow{m}|}\right)$$

c) **► Bestimmen des Punktes Q, in dem der Meteorit dem Punkt S am nächsten ist** (4P)

Die Spitze eines Berges befindet sich im Punkt $S(85\,|\,63\,|\,2)$. Deine Aufgabe ist es nun die Koordinaten des Punktes Q, in dem der Meteorit dem Punkt S am nächsten ist, zu bestimmen. Dafür muss der Vektor von Q nach S senkrecht zur Geraden p, entlang derer sich der Meteorit bewegt, verlaufen. Dazu benötigst du die Gleichung einer Ebene E , die als Normalenvektor den Vektor $\overrightarrow{m}$ besitzt, also senkrecht zu p verläuft, und den Punkt S enthält. Dann bestimmst du den Schnittpunkt von E und p. Dieser entspricht dem gesuchten Punkt Q, denn verbindet man ihn mit S so liegt diese Strecke in E und ist somit senkrecht zu p.
Für die Normalenform der Ebene E gilt:

$$E: \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 85 \\ 63 \\ 2 \end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix} 18 \\ 18 \\ -3 \end{pmatrix} = 0$$

d) **► Bestimmen des Abstands d zwischen Meteoritenbahn und Flugbahn** (5P)

In diesem Aufgabenteil sollst du nun den Abstand d zwischen der Meteoritenbahn, die durch die Gerade p beschrieben wird, und der Flugbahn f eines Flugzeugs bestimmen. Gesucht ist also der Abstand der zwei Geraden p und f. Dazu ist es wichtig zunächst über deren Lagebeziehung bescheid zu wissen.
Zwei Geraden im dreidimensionalen Raum können in den vier folgenden Lagebeziehungen zueinander stehen:

- Zwei Geraden sind **parallel**, wenn ihre Richtungsvektoren Vielfache voneinander sind.
- Zwei Geraden **schneiden** sich, wenn sie einen eindeutigen Schnittpunkt besitzen.
- Zwei Geraden sind **identisch**, wenn sie parallel sind und der Stützvektor der einen Geraden auf der anderen Geraden liegt.
- Zwei Geraden sind **windschief**, wenn sie weder parallel zueinander verlaufen noch einen Schnittpunkt besitzen.

Du musst also überprüfen ob die Richtungsvektoren von p und f Vielfache von einander sind. Dazu multiplizierst du einen der beiden Richtungsvektoren mit einem Parameter und setzt sie dann miteinander gleich.
Ergibt sich nicht in allen drei Gleichungen einen einheitlichen Wert für a sind p und f auch nicht parallel, in diesem Fall musst du die Geradengleichungen von p und f miteinander gleichsetzen um die Geraden auf einen möglichen Schnittpunkt zu untersuchen.
Kannst du keine Werte für s und k bestimmen, sodass alle drei Gleichungen lösbar sind, haben p und f keinen Schnittpunkt. Es bleibt dann nur noch die Möglichkeit, dass die Meteoritenbahn und die Flugbahn des Flugzeugs windschief zueinander verlaufen.
Um dann den Abstand d dieser beiden Geraden voneinander zu bestimmen, benötigst du den Verbindungsvektor zweier unbekannter Punkte, von denen einer auf p und einer auf f liegt. Ist dieser Verbindungsvektor sowohl senkrecht zum Richtungsvektor von p als auch senkrecht zum Richtungsvektor von f, so entspricht sein Betrag dem gesuchten Abstand d. Zwei Vektoren sind genau dann senkrecht zueinander, wenn ihr Skalarprodukt Null ist.
Um d zu bestimmen musst du also das Skalarprodukte von $\overrightarrow{U_1U_2}$ und den Richtungsvektoren von p und f mit Null gleichsetzen und das dadurch entstehende Gleichungssystem lösen. Dann setzt du die Lösungen für k und s in den Verbindungsvektor ein und bestimmst dessen Betrag. Dieser entspricht dem gesuchten Abstand d.

e) **► Ermitteln der Koordinaten des Punktes R** (4P)

Eine Radarstation im Punkt $T(107 \mid 102 \mid 3)$ erfasst alle Flugbewegungen innerhalb eines kugelförmigen Raumes mit einem Radius von 50 km. Deine Aufgabe ist es nun die, auf ganze Zahlen gerundeten, Koordinaten des Punktes R, in dem der Meteorit auf dem Radarschirm der Station erstmalig auftaucht, zu ermitteln. Dazu musst du zunächst die Gleichung der Kugel K aufstellen, die den Rand des Radarbereichs beschreibt. Für eine Kugelgleichung benötigt man allgemein die Koordinaten des Mittelpunkts $M(m_1 \mid m_2 \mid m_3)$ und den Radius r der Kugel. Damit erhält man dann folgende allgemeine Kugelgleichung:

$$K: \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix}\right]^2 = r^2$$

Hast du die Gleichung von K aufgestellt, so setzt du die einzelnen Koordinaten x, y und z der Geradengleichung von p ein und löst nach k auf. Durch Einsetzen der Lösungen für k in p erhältst du die Koordinaten der Schnittpunkte von K und p. Danach musst du noch entscheiden welcher der Schnittpunkte der gesuchte Punkt R ist, den der Meteorit zuerst erreicht. Durch den Richtungsvektor m von p nehmen die x- und y-Koordinaten der Punkte an denen sich der Meteorit befindet zu und die z-Koordinate nimmt ab. Der Schnittpunkt mit der höchsten z-Koordinaten und den niedrigsten x- und y-Koordinaten ist daher dann der gesuchte Punkt R, denn er befindet sich näher am Ausgangspunkt des Meteoriten.

Du gehst also so vor:

1. Schritt: Aufstellen der Kugelgleichung der Kugel K
2. Schritt: Bestimmen der Schnittpunkte von K und p
3. Schritt: Bestimmen der Koordinaten von R